

Nel sistema di figura, che è disposto in un piano verticale, la piastra quadrata di lato  $l$  e massa  $M$  scorre senza attrito lungo l'asse  $x$ . Il punto B è collegato con una molla AB al corsoio A di massa  $m$  e dimensioni trascurabili, che è impegnato a scorrere senza attrito lungo l'asse  $y$ . La molla ha costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $L_0$ . La forza di ingresso  $F$  aziona il movimento della piastra lungo l'asse  $x$ . Infine sulla massa  $m$  agisce una forza di disturbo  $F_d$  diretta lungo la direzione positiva dell'asse  $y$ .

Le equazioni che descrivono il modello sono:

$$m\ddot{x} = ax^2 - c\dot{x} - kx + kL_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-l)^2}} + F$$

$$M\ddot{y} = -mg - k(y-l) + kL_0 \frac{(y-l)}{\sqrt{x^2 + (y-l)^2}} + F_d$$

Si assuma di poter misurare lo spostamento lungo  $y$  e di poter agire sulla forza  $F$ :

- 1 Si determinino tutte le condizioni di equilibrio del sistema in funzione di un valore costante di  $y$  pari a  $y_0$ . Inoltre, si consideri nullo il disturbo  $F_d$ .
- 2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla generica configurazione di equilibrio individuata al punto precedente (considerando il valore positivo della  $x_{eq}$ ).
- 3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello:  
 $a = 1 \text{ kg}/(\text{ms}^2)$ ;  $c = 1 \text{ kg}/\text{s}$ ;  $g = 9.81 \text{ m}/\text{s}^2$ ;  $L_0 = 3 \text{ m}$ ;  $l = 0.5 \text{ m}$ ;  $k = 100 \text{ kg}/\text{s}^2$ ;  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $M = 10 \text{ kg}$   
 $y_0 = 2 \text{ m}$

- Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
- si ricavano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo  $F$  e di disturbo  $F_D$ ) e l'uscita  $y$ ;
- si discuta circa la stabilità del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$G(s) = \frac{-4.803}{(s - 1.034)(s + 1.084)(s^2 + 0.95s + 68.44)}$$

$$G_d(s) = \frac{0.1(s^2 + s + 65)}{(s - 1.034)(s + 1.084)(s^2 + 0.95s + 68.44)}$$

**in caso negativo**, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

4 Si sintetizzi un controllore che, agendo sull'ingresso  $F$ , e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio, rispetti le seguenti specifiche:

- Si desidera che il sistema raggiunga esattamente un valore di uscita pari a 2.2 m senza mai superare il valore di 2.21 m. Si consideri inoltre che, trascorso un intervallo di tempo pari a 10 s, l'uscita entri in un intervallo di  $[2.19, 2.21]$  m senza mai uscirne.
- Si desidera attenuare l'effetto di un disturbo variabile  $F_d = 0.01 \sin(\omega_d t)$  N agente per pulsazioni  $\omega_d < 5 \cdot 10^{-4} \text{rad/s}$  in modo che le oscillazioni indotte sull'uscita risultino minori di 0.01 m.
- In presenza di un rumore di misura caratterizzato da pulsazioni  $\omega_\nu > 20 \text{rad/s}$ , si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore allo 0.1% del rumore stesso.

Si riportino quindi, giustificando opportunamente tutti i passaggi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato e le funzioni di trasferimento del sistema controllato,
- i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche e giustificando le scelte progettuali),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative e la verifica del soddisfacimento delle specifiche.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola\_i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

**La valutazione dell'esame è basata su quanto scritto sui fogli consegnati. OGNI passaggio ed ogni scelta di progettazione devono essere opportunamente giustificati su questi.**

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con 3 cifre significative*

1 Gli equilibri del sistema si ottengono imponendo  $F_d = 0$ ,  $x$  costante e quindi  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  oltre a  $\ddot{y} = \dot{y} = 0$  e  $y = y_0$ . Si ottiene così il sistema seguente, valutato per le condizioni di equilibrio:

$$0 = -mg - k(y_0 - l) + \frac{kL_0(y_0 - l)}{\sqrt{\bar{x}^2 + (y_0 - l)^2}}$$

$$0 = a\bar{x}^2 - k\bar{x} + kL_0 \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (y_0 - l)^2}} + \bar{F}$$

Risolvendo il sistema di secondo grado nelle variabili incognite  $\bar{x}$  e  $\bar{F}$  si ottengono le espressioni seguenti :

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{k^2 L_0^2 (y_0 - l)^2 - (y_0 - l)^2 (mg + k(y_0 - l))^2}{(mg + k(y_0 - l))^2}}$$

$$\bar{F} = -a\bar{x}^2 + k\bar{x} - \frac{kL_0\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (y_0 - l)^2}}$$

2 Indicando con  $x$  il vettore di stato del sistema, vale a dire  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T := [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$ , e con  $u := [F \ F_d]^T$  il vettore degli ingressi, la dinamica del sistema non lineare espressa in forma di stato risulta:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(ax_1 - cx_2 - kx_1 + kL_0 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2}} + u_1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M}(-mg - k(x_3 - l) + kL_0 \frac{x_3 - l}{\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2}} + u_2)$$

$$y = x_3$$

Definendo le nuove variabili  $\tilde{x} := x - \bar{x}$ ,  $\tilde{u} := u - \bar{u}$  e  $\tilde{y} := y - \bar{y}$ , una approssimazione al primo ordine (lineare) del sistema dato risulta:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

con  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$ ,  $C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$ ,  $D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \star_1 & -\frac{c}{m} & \star_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \star_3 & 0 & \star_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\star_1 = \frac{1}{m} \left( 2ax_1 - k + kL_0 \frac{\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2} - \frac{2x_1^2}{2\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2}}}{x_1^2 + (x_3 - l)^2} \right)$$

$$\star_2 = \frac{kL_0}{m} \frac{\frac{-2(x_3 - l)x_1}{2\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2}}}{x_1^2 + (x_3 - l)^2}$$

$$\star_3 = \frac{\frac{kL_0(x_3 - l)}{M} \frac{-2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2}}}{x_1^2 + (x_3 - l)^2}$$

$$\star_4 = \frac{1}{M} \left( -k + kL_0 \frac{\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2} + \frac{-2(x_3 - l)^2}{2\sqrt{x_1^2 + (x_3 - l)^2}}}{x_1^2 + (x_3 - l)^2} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

3 Sostituendo i valori numerici per le variabili coinvolte, si ottengono le seguenti espressioni (con le opportune unità di misura):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -65.0011 & -1 & -48.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.8031 & 0 & -2.369 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

Indicando con  $B_\tau$  e  $D_\tau$  la prima colonna delle matrici  $B$  e  $D$ , corrispondenti all'ingresso  $F$ , e con  $B_d$  e  $D_d$  la seconda colonna, corrispondenti all'ingresso di disturbo  $F_d$ , le funzioni di trasferimento cercate si possono ottenere calcolando:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_\tau + D_\tau = \frac{-4.8031}{(s - 1.034)(s + 1.084)(s^2 + 0.9498s + 68.44)}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d + D_d = \frac{0.1(s^2 + s + 65)}{(s - 1.034)(s + 1.084)(s^2 + 0.9498s + 68.44)}$$

La funzione di trasferimento del sistema presenta 1 polo a parte reale positiva. Questo permette di concludere che il sistema è instabile.

4 Per quanto riguarda il controllore è opportuno procedere alla progettazione di un sistema in cascata con doppio anello di retroazione - l'anello interno con il solo scopo di stabilizzare il sistema, l'anello esterno con lo scopo di soddisfare le specifiche richieste.

Si procede alla progettazione lavorando sul luogo delle radici. Un possibile approccio (quello più immediato) per la progettazione di un controllore stabilizzante è basato sull'inserimento di un guadagno negativo. Un esempio è  $C_1 = -16$  in figura 1

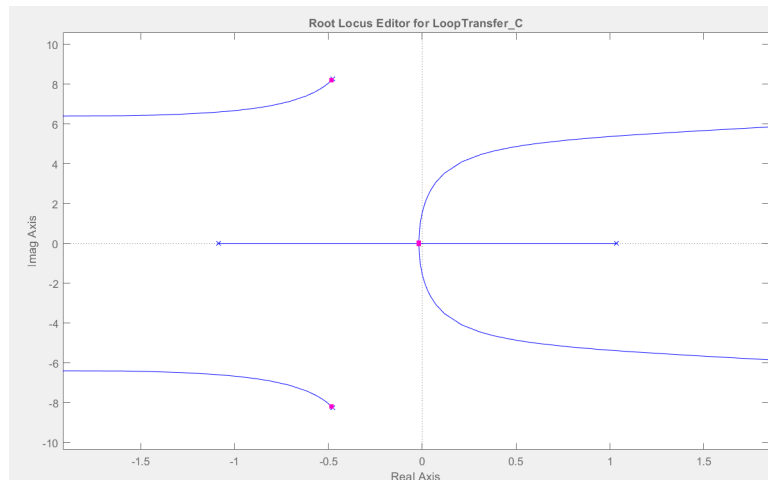


Figure 1: rlocus( $G_{c1}$ ) - con controllore

Il controllore risultante ha quindi la seguente espressione:  $C_1(s) = -16$ . Adesso, è possibile procedere alla progettazione del controllore  $C_2(s)$  per il soddisfacimento delle specifiche, con una funzione di trasferimento dell'anello interno pari a

$$G_{c1}(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$$

e con una funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita pari a

$$G_{dc1}(s) = \frac{G_d(s)}{1+C_1(s)G(s)}$$

4.1 Si procede anzitutto a progettare un controllore che consenta di soddisfare le specifiche relative alla risposta al gradino. Si chiede che il sistema, partendo da una condizione di equilibrio pari a  $y_0 = 2m$ , sia portato ad una uscita pari a  $y_\infty = 2.2m$ , vale a dire un'ampiezza del gradino pari a  $0.2m$ :

- si richiede che il valore desiderato venga raggiunto senza mai superare la distanza di  $y_{max} = 2.21m$   
 $\Rightarrow$  è ammessa sovraelongazione pari a  $S\% = \frac{|y_{max}-y_\infty|}{|y_\infty-y_0|} \cdot 100 = 5\%$ . Secondo tale condizione il sistema in anello chiuso può essere approssimato da un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti) con smorzamento minimo ammissibile ottenuto invertendo la relazione  $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ .

$$d > \sqrt{\frac{(\ln(S))^2}{\pi^2 + (\ln(S))^2}} \Rightarrow d > 0.69$$

Questo si traduce in una condizione sul margine di fase minimo, secondo la relazione approssimata:

$$M_f > 0.69 \cdot 100 \Rightarrow \mathbf{M_f > 69^\circ}$$

- si richiede inoltre che la distanza  $y$  entro  $10s$  entri, senza più uscirne, nell'intervallo  $[2.19, 2.21]m$ . Si tratta di una specifica sul tempo di assestamento al  $p\% = \frac{2.21-2.2}{2.2-2} 100 = 5\%$  che si traduce in una specifica sulla pulsazione di taglio  $\omega_t \geq \frac{3}{0.7 \cdot 10} \Rightarrow \omega_t \geq \mathbf{0.43 \text{ rad/s}}$

4.2 Una volta chiuso anche l'anello esterno, l'uscita è legata al disturbo dalla funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{F_d(s)} = \frac{G_{dc1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Secondo il teorema della risposta armonica, la specifica è assicurata se per le pulsazioni di interesse  $\omega_d < 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ , è rispettato il seguente vincolo sul modulo della funzione di trasferimento  $\frac{Y(s)}{F_d(s)}$ .

$$\frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < \frac{0.01}{0.01} \Rightarrow \frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < 1$$

Essendo a bassa frequenza, vale l'approssimazione  $\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\| \approx \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|$ ; possiamo quindi tradurre la specifica in un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento di anello aperto, infatti, passando ad esprimere i moduli in decibel, otteniamo:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > \|G_{dc1}(j\omega_d)\|_{dB} - 20\log_{10}(1)$$

dal diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento  $G_{dc1}(s)$  per le pulsazioni di interesse (figura 5) si ricava il valore ( $32.3dB$ ) che massimizza il modulo considerato, e quindi, la condizione che permette di soddisfare la specifica risulta:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 33dB + 0dB \Rightarrow \mathbf{\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 33dB}$$

4.3 L'uscita è legata al rumore di misura dalla funzione di sensitività complementare, cambiata di segno:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per un disturbo in alta frequenza  $\omega_\nu > 20 \text{ rad/s}$ , vale l'approssimazione

$$\left\| \frac{Y(j\omega_\nu)}{\nu(j\omega_\nu)} \right\| \approx \|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\|$$

per cui, detta  $A_N$  l'ampiezza del rumore di misura, la specifica si traduce in

$$\|C(j\omega_\nu)G_1(j\omega_\nu)\| < \frac{\mathbf{0.001A_N}}{A_N} = \mathbf{0.001}$$

**o, in decibel,  $-60 \text{ dB}$ .**

Si noti che la conoscenza dell'ampiezza  $A_N$  sarebbe superflua.

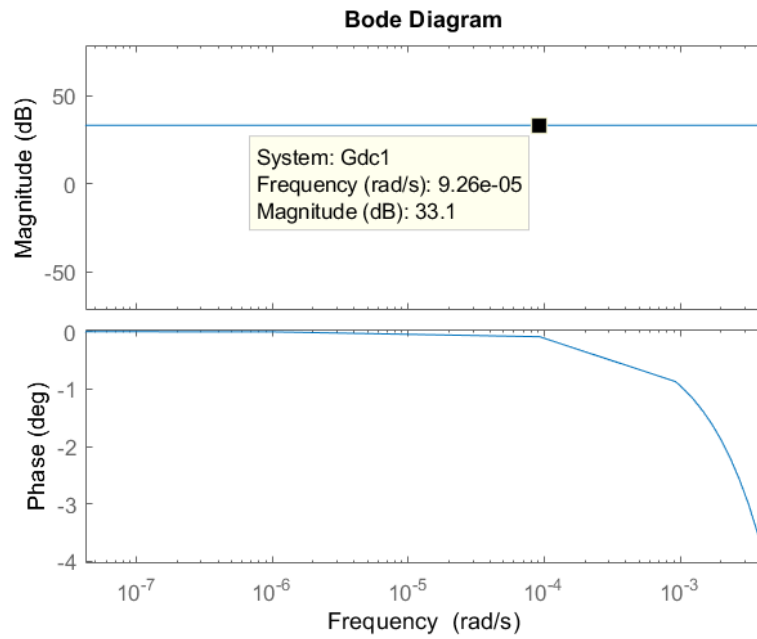


Figure 2:  $\text{bode}(G_{dc1})$

Una volta tradotte tutte le specifiche, è possibile procedere al progetto del controllore. Un esempio di controllore che permette di rispettare le specifiche è il seguente:

$$C_2(s) = 30.331 \frac{(s + 0.04762)(s + 0.01724)}{s(s + 7.143)(s + 8.333)}.$$

Di seguito vengono riportati Diagrammi di Bode, luogo delle radici e risposta al gradino del sistema controllato che rispetta tutte le specifiche:

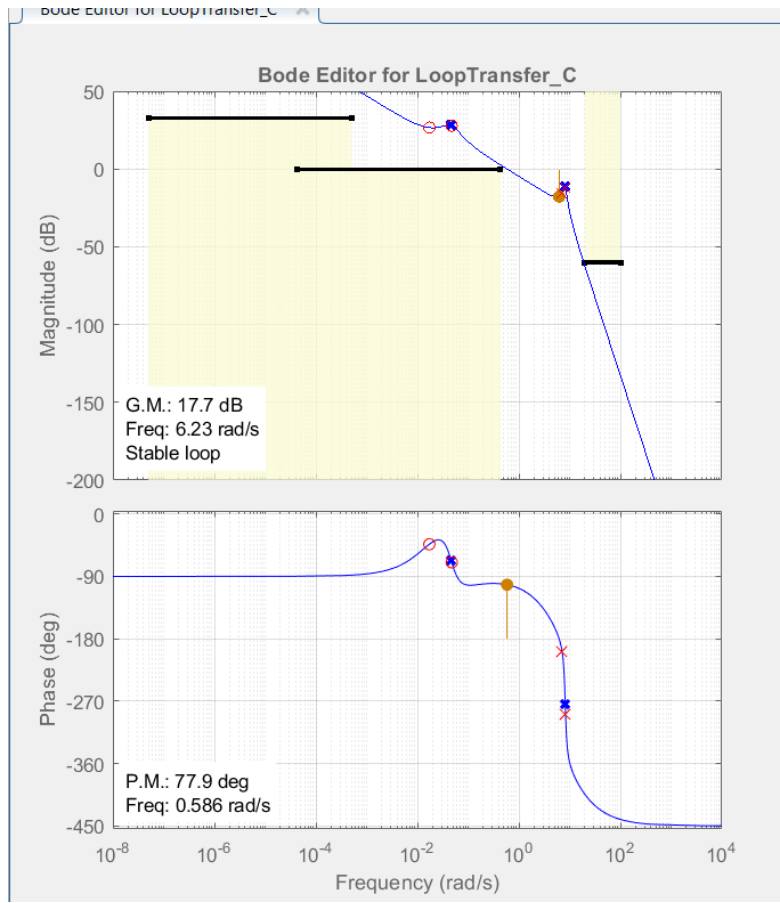


Figure 3: bode sistema controllato

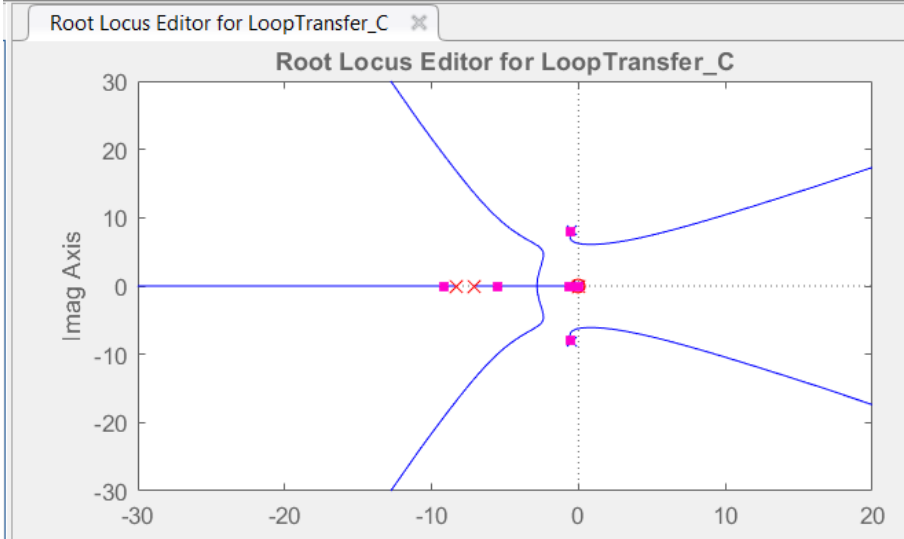


Figure 4: luogo radici sistema controllato

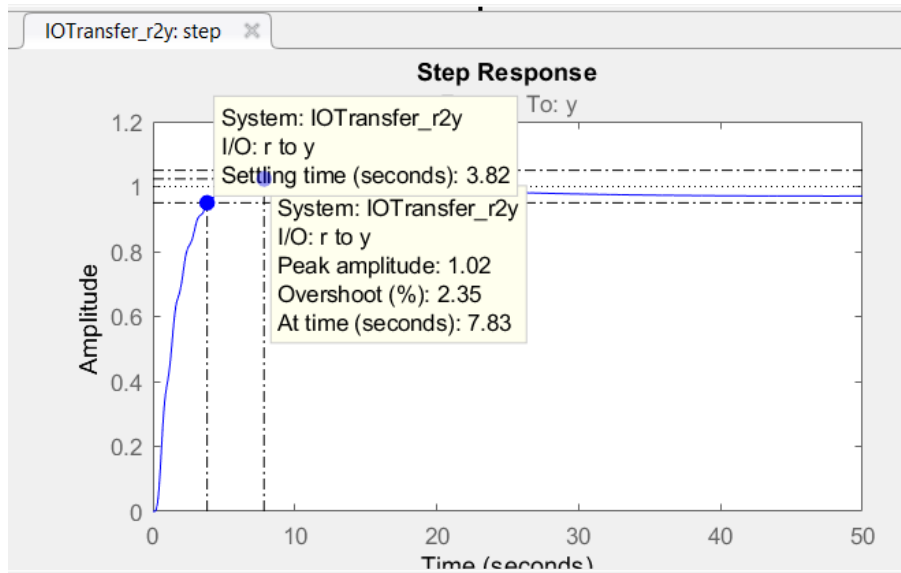


Figure 5: risposta al gradino sistema controllato