Esame di Controlli Automatici 21 Luglio 2016

Q1 Si consideri un sistema $\dot{x} = f(x)$ e si dica sotto quali condizioni un punto $\bar{x}$ ne rappresenta un equilibrio instabile;

A1 Deve essere $f(\bar{x}) = 0$ e $\bar{x}$ non stabile, ovvero se esistono valori di ϵ sufficientemente piccoli per i quali, qualsiasi sia $\delta > 0$, una condizione iniziale che differisce da $\bar{x}$ meno di δ (ma più di zero) evolve in modo da differire, in qualche istante di tempo, più di ϵ. In formule, $\exists\, \epsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0$, $\exists! x' : \|x' - x_0\| < \delta$ per il quale, per qualche t, si ha $\|x(x',t) - x(x_0,t)\| > \epsilon$.

Q2 Per lo stesso sistema, si dica quando una superficie Γ descritta implicitamente da $C(x) = 0$ ne rappresenta un invariante instabile;

A2 Γ è invariante se $L_f \Gamma(x) = 0$, $\forall x \in \Gamma$. Detta $d(x,\Gamma)$ la distanza di un punto x da Γ, la stabilità, e quindi la instabilità, di Γ sono definite in modo analogo al caso di un punto.

Q3 Si enuncino tutti i criteri noti per affermare la instabilità di un punto di equilibrio;

A3 Supponiamo per semplicità di aver posto l'equilibrio nell'origine del sistema di coordinate x. Un primo risultato è un caso del metodo diretto di Lyapunov, quando si abbia per una $V(x)$ p.d. una $L_f V(x)$ anch'essa p.d.. Un secondo risultato è dato dal teorema di instabilità di Lyapunov, che si applica quando si abbia $L_f V(x)$ p.d. per una $V(x)$ che, pur senza essere definita, ammetta valori positivi in punti arbitrariamente vicini all'origine. Un terzo e più ampio risultato è dato dal teorema di Cetaev, che non chiede che siano definite né $V(x)$ né $L_f V(x)$, ma che esista una regione aperta che contiene l'origine almeno come punto di accumulazione e sul cui bordo, in un intorno dell'equilibrio, valga $V(x) = 0$.

Q4 Si consideri l'equilibrio nell'origine per i tre sistemi LTITC $\dot{x} = A_i x$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si discuta se e come è possibile trovare una funzione di Lyapunov, e si indichino i comandi matlab per calcolarla.

A4 La matrice A_1 è in forma canonica di osservazione, il suo polinomio caratteristico ha tre radici in -1, quindi è sufficiente risolvere l'equazione di Lyapunov $A^T P + PA = -Q$ per Q p.d., e porre $V(x) = x^T P x$. Ad esempio per $Q = I$, con il comando `P = lyap(A', -eye(size(A))` si trova

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A_2 ha un autovalore positivo, quindi il sistema è instabile, e non esiste una funzione di Laypunov nè ovviamente una soluzione per la equazione di Lyapunov.

La matrice A_3 ha un autovalore in zero e due a parte reale negativa, quindi il sistema è marginalmente stabile. Ovviamente per nessuna Q p.d. sarà possibile trovare una P p.d., altrimenti il sistema sarebbe asintoticamente stabile. Si dovrà quindi cercare tra le Q semidefinite positive quelle che abbiano una soluzione (che non sarà unica). Sappiamo comunque dal teorema di esistenza che, essendo il sistema stabile, almeno una funzione di Lyapunov deve esistere. Per trovare una funzione di Lyapunov, si noti che è impossibile in questo caso usare direttamente il comando Matlab `lyap (M,Q)` con $M = A_3$, poiché il comando accetta solo matrici M p.d.

La soluzione si può comunque trovare indirettamente. Nel caso in esame, ad esempio, ponendo

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}, \; \bar{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

si osserva che affinchè l'equazione di Laypunov sia risolvibile anche Q dovrà essere della forma

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix}, \; \bar{Q} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Possiamo quindi risolvere una equazione di Lyapunov ridotta $\bar{A}^T\bar{P} + \bar{P}\bar{A} = -\bar{Q}$, con $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ p.d.. Ad esempio usando il comando `lyap (M,N)`, ponendo $M = \bar{A}$ e $N = I_2$ e riassemblando in

$$P = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{bmatrix},$$

si ha infine che, qualunque sia $p > 0$,

$$A_3^T P + PA_3 = -Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nel caso della matrice A_4 si ha un autovalore in zero con molteplicità algebrica tre e molteplicità geometrica due. Essendo il sistema instabile (polinomialmente), non può esistere alcuna soluzione P p.d. alla equazione di Lyapunov con Q p.s.d.. È possibile riscontrarlo numericamente procedendo come nel caso precedente ponendo

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per poi osservare che, per qualsiasi P, si otterrebbe

$$-\bar{Q} = \bar{A}_4^T\bar{P} + \bar{P}\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & P_{11} \\ P_{11} & 2P_{12} \end{bmatrix},$$

che ha determinante negativo, quindi sempre due autovalori di segno opposto.

Q5 Si consideri adesso i sistemi LTITD $x^+ = A_i x$ con le stesse matrici del punto precedente, e si trovi anche in questo caso, quando possibile, una funzione di Lyapunov discutendo i risultati.

A5 Per i casi A_2, A_3, ed A_4 tutti gli autovalori sono all'interno del cerchio unitario, quindi esiste sempre una soluzione P p.d. della equazione di Lyapunov discreta $A^T PA - P = -Q$, che si può trovare col comando Matlab `dlyap(A', eye(size(A)))`. Il primo sistema ha un autovalore sul cerchio unitario con molteplicità algebrica uno. La stabilità (eventualmente solo marginale) del sistema dipende quindi dalla molteplicità geometrica. La matrice A_1 ha un solo autovettore: questo segue dal fatto che è in forma canonica di osservazione e dal lemma PBH, ma può essere facilmente osservato anche per calcolo diretto (rank $(A + I) = 2$).

Q6 Si consideri il sistema rappresentato dalla f.d.t.

$$G(s) = \frac{s^2 + b}{(s^2 + as + 4)}$$

Discutere le proprietà di stabilità, minimo sfasamento e la dimensione delle minime realizzazioni nello spazio di stato al variare dei parametri a e b.

A6 Il sistema è instabile se $a < 0$, marginalmente stabile se $a = 0$, asintoticamente stabile se $a > 0$. Se $b >= 0$, vi sono due zeri immagnari puri, mentre se $b < 0$ il sistema ha uno zero a parte reale positiva e non è a sfasamento minimo. Quando $-b \mp a\sqrt{b} - 4 \neq 0$, il sistema non ha cancellazioni e la realizzazione minima ha dimensione due; altrimenti, entrambe i poli si cancellano, ed il sistema dinamico degenera in una semplice costante, con dimensione nulla della realizzazione minima.

Q7 Si considerino i due sistemi rappresentati dalle f.d.t

$$G_1 = \frac{s - \alpha}{(s - \beta)(s - \gamma)},\ G_2 = \frac{s - \delta}{(s - \alpha)}$$

e se ne scrivano delle realizzazioni minime nello spazio di stato;

A7 La realizzazione di G_1 ha dimensione due se $\alpha \neq \beta$ e $\alpha \neq \gamma$, dimensione uno se $\alpha = \beta$ e/o se $\alpha = \gamma$. La realizzazione di G_2 ha dimensione uno se $\alpha \neq \delta$, zero altriimenti.

Q8 Si consideri la connessione in parallelo e le due possibili connessioni in serie dei sistemi di cui al punto precedente. Si indichino per i tre casi gli autovalori dei quattro sottosistemi della scomposizione di Kalman;

A8 Nella connessione in parallelo, tutti gli autovalori appartengono al sistema raggiungibile ed osservabile se $\alpha \neq \beta$ e $\alpha \neq \gamma$. Se $\alpha = \beta$, nasce un sottosistema non raggiungibile e non osservabile con autovalore corrispondente. Analogamente se $\alpha = \gamma$. Nella connsessione in serie, si ha certamente una cancellazione del polo in α, che entra nel sottosistema osservabile ma non raggiungibile se G_1 precede G_2, ovvero raggiungibile ma non osservabile se G_2 precede G_1. Può inoltre esserci una ulteriore cancellazione di un polo se $\beta = \delta$ e/o $\gamma = \delta$. L'autovalore corrispondente alla cancellazione diviene proprio del sottosistema raggiungibile ma non osservabile se G_1 precede G_2, e viceversa.

Q9 Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} x,$$

si discuta il progetto di un regolatore che, utilizzando solo la misura delle uscite, stabilizzi il sistema e renda nullo l'errore di inseguimento per riferimenti a rampa, discutendo i risultati al variare di α.

A9 Il sistema ha f.d.t. $G(s) = \dfrac{s+\alpha}{(s+1)(s-2)}$. Per $\alpha \notin \{-1, 2\}$, la funzione di trasferimento data è coprima, quindi la realizzazione di dimensione due è sia raggiungibile che osservabile, e la sintesi del regolatore è possibile con metodi standard. La specifica di errore a regime nullo può essere verificata se il regolatore include un autovalore in zero montato in serie nella catena diretta. Il regolatore complessivo porà quindi essere formato da un regolatore basato su osservatore di dimensione tre in serie con il polo nell'origine, e avrà dimensione complessiva quattro.

Nel caso in cui $\alpha = -1$, si ha una cancellazione di polo asintoticamente stabile. La dinamica del sottosistema non osservabile che si crea rispetto alla realizzazione originale a dimensione due è asintoticamente stabile, e quindi il sistema è detettabile. Una realizzazione minima del sistema in questo caso ha dimensione uno, ed un regolatore che assolve le specifiche può essere costruito in modo analogo al precedente ma con soli tre stati. Questo regolatore garantisce la stabilità ingresso-uscita del sistema regolato, mentre la detetabilità garantisce che la dinamica non osservabile converga a zero.

Nel caso $\alpha = 2$ invece la cancellazione riguarda un polo instabile. In questo caso non è possibile rendere il sistema internamoente stabile con una retroazione della sola uscita.