Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici –03–04–2002

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols del sistema descritto dalla seguente f.d.t. :

$$G(s) = 100 \frac{s + 2\alpha}{(s + 3\beta)(s^2 + 2s + 2)}$$

B (pt. 8) Dato il sistema tempo continuo descritto dalla seguente f.d.t. :

$$G(s) = \frac{s + 10\alpha}{(s^2 + 100s + 10^4)}$$

progettare un controllore che garantisca in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa ≤ 1 %;
- margine di fase $\leq \pi/2$;
- pulsazione di taglio compresa tra 10 e 100 rad/sec.

Sia assegnata la seguente f.d.t. di un sistema tempo continuo:

$$G(s) = \frac{s}{(s^2 + 2s + 2)(s + 1)(s + 3)}$$

C (pt. 5) Tracciare il luogo delle radici per retroazione sia positiva che negativa con $K \in [0, \infty)$.

D (pt. 6) Trovare il range di valori per K per i quali il sistema in retroazione risulta stabile.

Con riferimento al sistema non lineare
$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 - 2x + u \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

raffigurato di seguito

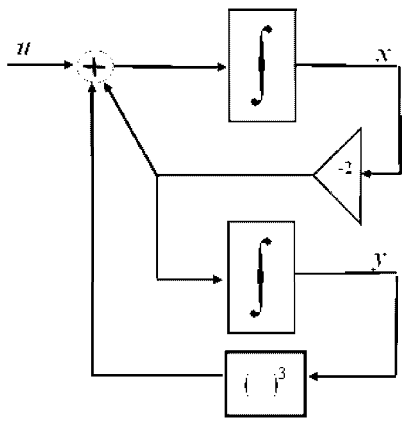


Figure 1: Sistema non-lineare

E (pt. 6) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo e studiare la stabilità dell'equilibrio in tali punti.

F (pt. 4) Trovare un ingresso u che rende l'origine punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile, e garantisce una velocitá di convergenza esponenziale pari a K_v.

(suggerimento: se necessario, utilizzare una candidata di Lyapunov della famiglia $V = ax^p + by^q$)

Soluzione

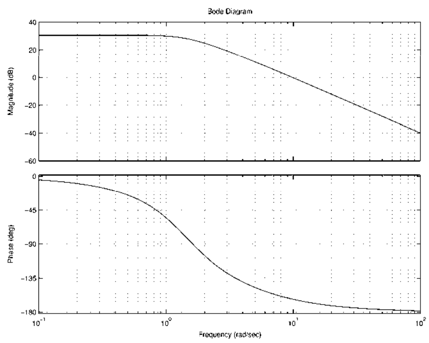
A) Prima di tracciare i diagrammi portiamo la $G(s)$ nella forma di Bode:

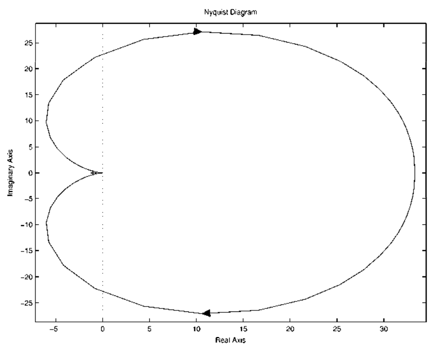
$$G(s) = \frac{100 \cdot 2\alpha}{3\beta \cdot 2} \frac{1 + \frac{s}{2\alpha}}{(1 + \frac{s}{3\beta})(1 + s + (\frac{s}{\sqrt{2}})^2)}$$

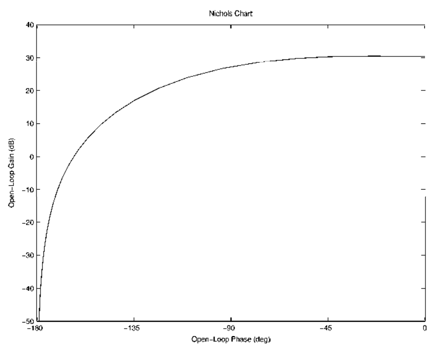
e isoliamo i seguenti termini:

- $K = \frac{100\alpha}{3\beta}$ con un contributo in fase nullo;
- zero in -2α con un contributo in fase di $+\frac{\pi}{2}$ e una pendenza di $20\frac{db}{dec}$ a partire da $\omega = 2\alpha$;
- polo in -3β con un contributo in fase di $-\frac{\pi}{2}$ e una pendenza di $-20\frac{db}{dec}$ a partire da $\omega = 3\beta$;
- una coppia di poli complessi coniugati in $(1 \pm j)$ con un contributo in fase di $-\pi$ e in ampiezza di $-40\frac{db}{dec}$ a partire da $\omega = \sqrt{2}$. Il $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pertanto il digramma reale dei due poli c.c. é sempre decrescente.

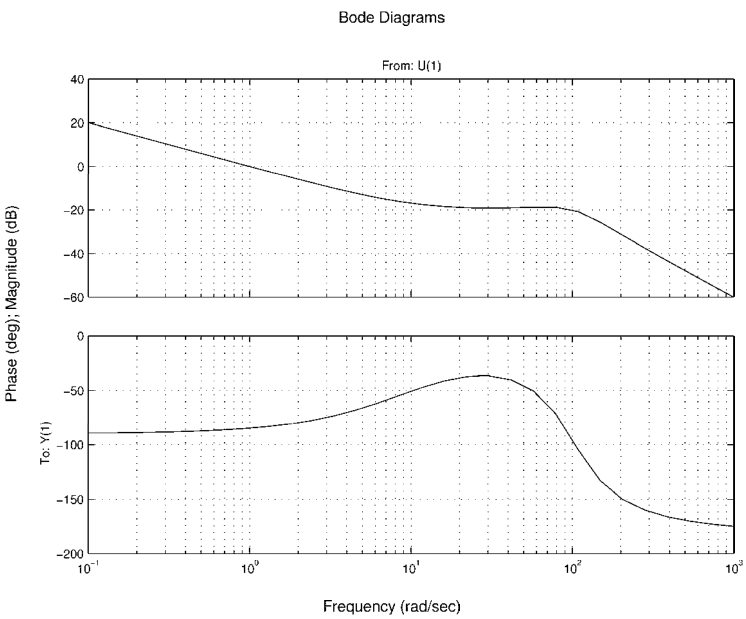
Di seguito vengono riportati i diagrammi di Bode del sistema con $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ seguiti da quelli di Nyquist e Nichols ricavati dai precedenti.







B) Poiché il sistema é a fase minima la sintesi del controllore puó essere svolta direttamente sui diagrammi di Bode. Per quel che riguarda le specifiche statiche il controllore dovrá essere di tipo 1 con guadagno K calcolato in base alla specifica sull'errore alla rampa unitaria. Dai calcoli si ottiene: $K = \frac{1000}{\alpha}$. Il diagramma di Bode del sistema compensato, supposto $\alpha = 1$, risulta:



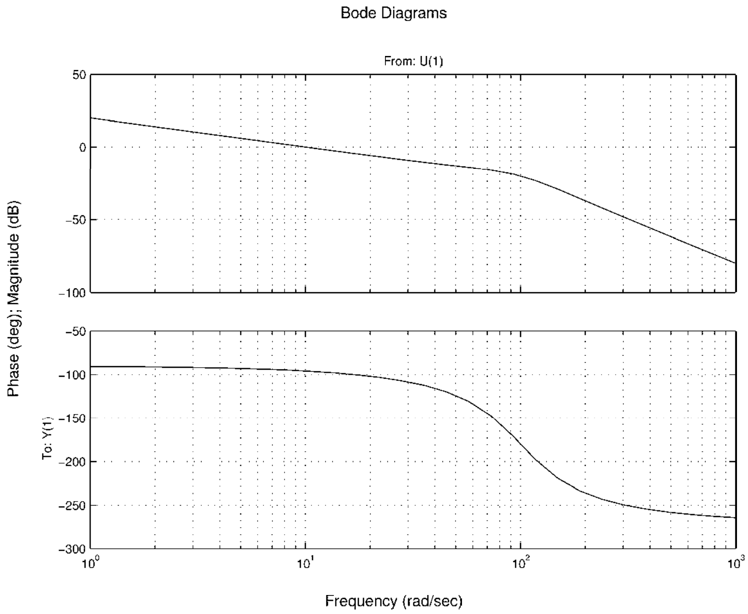
Come si nota dal grafico le specifiche sulla banda passante e sul margine di fase non sono soddisfatte. Una possibilitá é quella di inserire un polo alla pulsazione $\omega = 10\alpha$ in modo da eliminare lo zero che induce un guadagno in fase, e di amplificare il guadagno del sistema di un fattore 100. La f.d.t. del controllore risulta:

$$C(s) = \frac{10^5}{\alpha} \frac{1}{s(s + 10\alpha)}$$

Con questa scelta si arriva alla seguente f.d.t:

$$G(s)C(s) = \frac{10^5}{\alpha} \frac{1}{s(s^2 + 100s + 10^4)}$$

Il diagramma del sistema asservito, per $\alpha = 1$, risulta il seguente:



che soddisfa le specifiche.

C) Il sistema ad anello aperto ha i seguenti poli $(-1 \pm j), -1, -3$ ed uno zero nell'origine.

1. Reazione negativa: dell'asse reale fa parte il tratto tra lo zero nell'origine e il polo in -1 e tutta la zona ≤ -3; ci sono tre asintoti con centro in -2 spaziati tra loro di $120°$ $(60°, 180°, 300°)$.

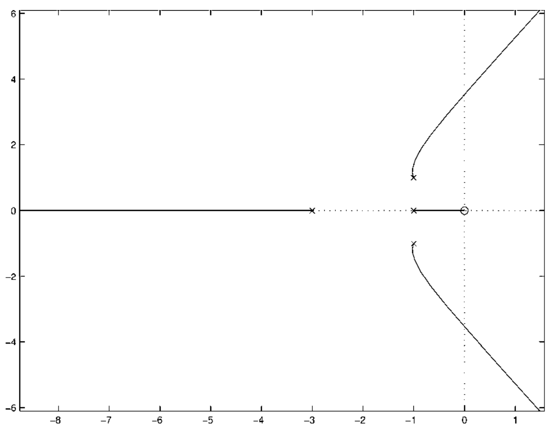


Figure 2: Luogo radici con reazione negativa

2. Reazione positiva: fa parte del luogo tutto l'asse reale positivo ed il tratto tra i poli -1 e -3; ci sono tre asintoti con centro in -2 spaziati tra loro di $120°$ $(0°, 120°, 240°)$.

D) Dal luogo delle radici notiamo che sia per reazione positiva che negativa ci sono dei poli che si spostano nel semipiano a $Re \geq 0$. Per trovare i valori di K utiliziamo il criterio di Routh distinguendo tra:

1. Reazione negativa $1 + KG(s)$: i poli sono radici di $s^4 + 6s^3 + 13s^2 + (14 + K)s + 6$. Costruendo la tabella di Routh troviamo che K deve essere tale che $64 - K \geq 0$ e $-K^2 + 50K + 860 \geq 0$ per le quali si ottiene un K limite $\cong 63.5$.

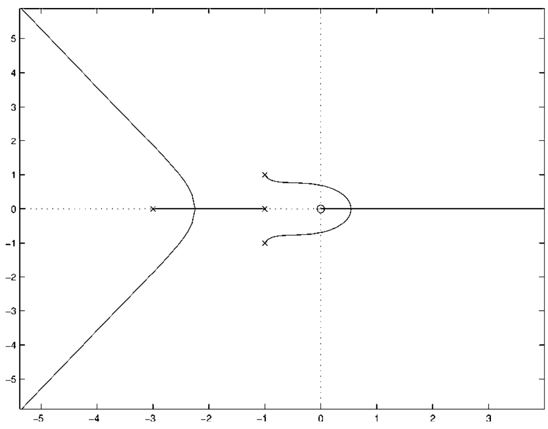


Figure 3: Luogo radici con reazione positiva

2. Reazione positiva $1 - KG(s)$: i poli sono radici di $s^4 + 6s^3 + 13s^2 + (14 - K)s + 6$ quindi il K cercato é quello per il quale $14 - K \leq 0$.

E) I punti di equilibrio per $u = 0$ si trovano ponendo a zero $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Dalla $\dot{y} = 0$ otteniamo $x = 0$ che sostituito nella prima equazione comporta che anche $y = 0$. Il sistema, quindi, presenta un unico punto di equilibrio $x = [0, 0]^T$.

Per studiare la stabilitá dell'origine si puó utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov. La matrice del modello linearizzato é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Visto che gli autovalori della matrice sono $(-2, 0)$ non possiamo dire nulla riguardo la stabiliá dell'origine. Dobbiamo ricorrere al metodo diretto di Lyapunov. Consideriamo una generica funzione di Lyapunov $V(x, y) = ax^p + by^q$ con p, q pari. Calcoliamoci la $\dot{V}$:

$$\dot{V} = (\nabla V)^T \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} apx^{p-1} & bqy^{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^3 - 2x \\ -2x \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\dot{V} = -2pax^p + apx^{p-1}y^3 - 2xqby^{q-1}.$$

Per eliminare i termini misti basta prendere $p = 2$, $q = 4$ e $ap - 2qb = 0$. A questo punto ho $\dot{V} = -4ax^2$ che si annulla nell'insieme dei punti $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, per α qualsiasi. Poiché la derivata di V é semidefinita negativa, la globale asintotica stabilitá é assicurata dal fatto che il piú grande insieme invariante é l'origine.

F) Per rendere l'origine punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile possiamo scegliere un ingresso del tipo $u = -y^3 + k_1 x + k_2 y$ con $k_2 \neq 0$ (altrimenti oltre all'origine generiamo come punti di equilibrio tutto l'asse $x = 0$) per eliminare la non linearitá.

Il linearizzato diventa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 + k_1 & k_2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che la traccia di una matrice corrisponde alla somma degli autovalori e il determinante corrisponde al loro prodotto, si ottengono le seguenti relazioni: $-2 + k_1 = -2K_v$ e $2k_2 = K_v^2$ (supponendo di allocare entrambi i poli in $-K_v$). Dalle precedenti relazioni si ottiene: $k_1 = -2K_v + 2$ e $k_2 = \frac{K_v^2}{2}$.