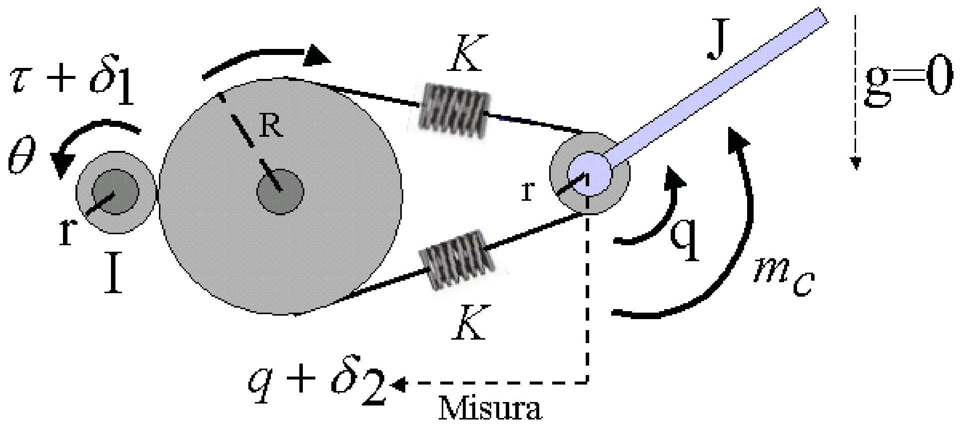
Scritto di regolazione e controllo dei sistemi meccanici — 27 Giugno 2002

Numero di matricola						
	$-$	$-$	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

• **(NO/VO)** Dato il sistema di un braccio rigido con riduttore e trasmissione elastica di coppia al giunto descritto in figura



sia: τ la coppia motrice (che é controllabile e affetta da un disturbo costante δ_1); $r = \sqrt{\beta}$ il raggio della puleggia motrice; $I = 100 + \frac{\delta - 5}{10}$ il momento di inerzia delle ruote ridotto all'asse del motore; θ la posizione angolare dell'asse motore; $R = 10 + \gamma$ il raggio della ruota condotta; $\sigma = \frac{1}{2\beta}$ la costante elastica della cinghia di trasmissione. Si ponga pari a r anche il raggio della puleggia del braccio, il cui momento di inerzia è $J = I$, e la cui posizione angolare è indicata da q.

Si vuole controllare la posizione angolare q del link utilizzando la misura della posizione q stessa disponibile mediante un sensore posizionato sull'asse del giunto, il quale è però affetto da rumore di misura δ_2.

Si chiede di progettare un sistema di controllo che garantisca le seguenti specifiche:

1. Errore nullo alla rampa lineare del riferimento di posizione (con disturbi nulli);
2. Errore di posizione in presenza di solo disturbo $\delta_1 = h(t)$ (gradino unitario) inferiore a 0.01;
3. Errore di posizione in presenza del solo disturbo $m_c = 10h(t)$ inferiore a 0.01;
4. Qualora il sistema presenti delle variazioni parametriche, garantire che la sensibilità dell'anello sia $\leq 1\%$ per ingressi con pulsazioni inferiori a $1 rad/sec$.
5. Nella risposta al gradino, si chiede tempo di assestamento inferiore a $0.1 sec$ e sovraelongazione percentuale massima inferiore a 30%;
6. Reiezione del rumore di misura a pulsazioni maggiori o uguali di $1000 rad/sec$, nella misura di almeno lo 0.01;

• **VO** Dato il sistema **Tempo Continuo** non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1 - 1)^2 + x_2 + u \end{cases}$$

Posto $u = 0$, trovarne i punti di equilibrio e discuterne la stabilitá. Inoltre, è possibile che un ingresso $u = k_1(x_1 - 1) + k_2 x_2$ renda il punto di equilibrio asintoticamente stabile? Giustificare la risposta eventualmente usando una candidata di Lyapunov del tipo $V = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$.

Soluzione

- Il sistema risulta descritto dalla seguente dinamica

$$\begin{cases} I\ddot{q} = -2\sigma r^2(\theta + q) + m_c \\ I\ddot{\theta} = -2\sigma r^2(\theta + q) + \tau + \delta_1 \\ y = q + \delta_2. \end{cases}$$

L-trasformando entrambe le equazioni ed effettuando le opportune sostituzioni, si ottiene

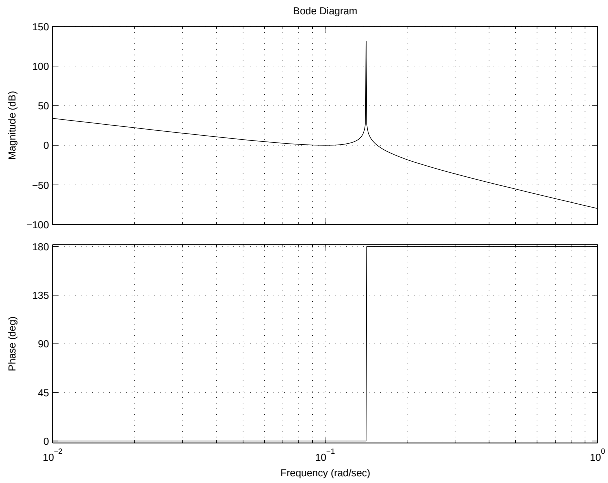
$$Q(s) = \frac{-2\sigma r^2}{s^2(I^2 s^2 + 4\sigma r^2 I)}(\tau + \delta_1) + \frac{s^2 + 2r^2\sigma}{s^2(I^2 s^2 + 4r^2\sigma I)} m_c =$$

$$= P(s)(\tau + \delta_1) + D(s) m_c.$$

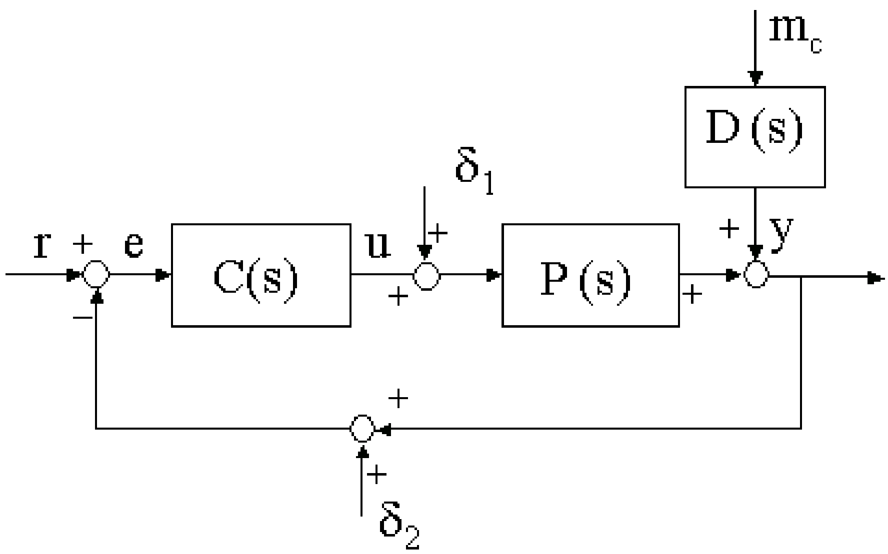
Sostituendo i valori dei parametri dati dal testo, e ponendo ad esempio $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 5$, si ha

$$Q(s) = -\frac{1}{s^2(10^4 s^2 + 200)}(\tau + \delta_1) + \frac{s^2 + 1}{s^2(10^4 s^2 + 200)} m_c$$

Il diagramma di Bode della $P(s)$ risulta in questo caso



Non avendo l'impianto dato poli, né zeri, a parte reale positiva, il progetto di prima massima può essere condotto supponendo una semplice configurazione dell'anello con un controllore $C(s)$ in catena diretta (da progettare), ed una retroazione unitaria negativa, ed operando direttamente sul diagramma di Bode delle ampiezze del sistema in catena aperta, cioè di $C(s)G(s)$ (vedi figura)



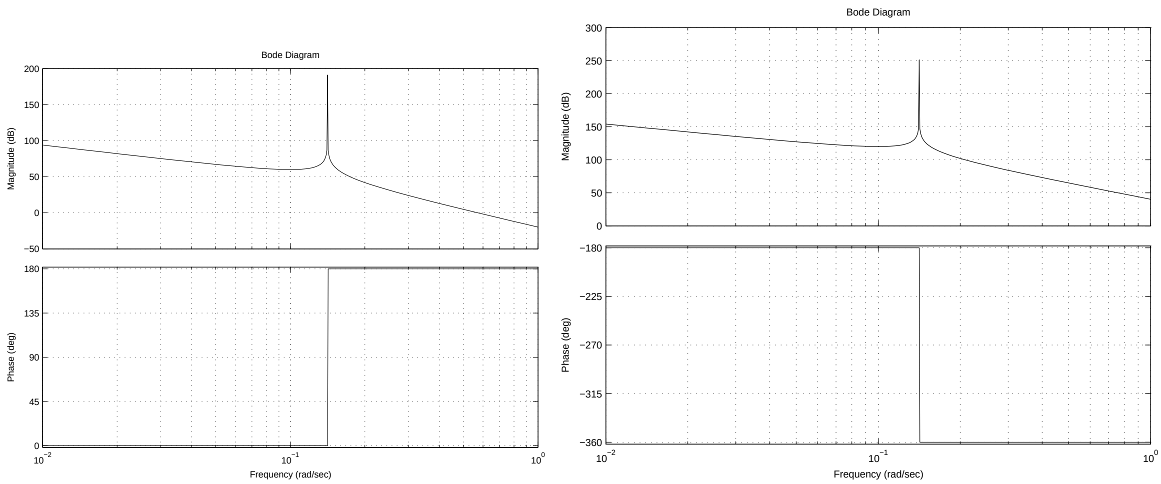


Figure 1: Diagrammi di Bode per i sistemi $1000P(s)$ (sinistra) e $-10^6P(s)$ (destra).

La trasformata dell'uscita in funzione di tutti i segnali presenti (riferimento e disturbi), risulta

$$Y = \frac{CP}{1+CP}R - \frac{CP}{1+CP}\delta_2 + \frac{P}{1+CP}\delta_1 + \frac{D}{1+CP}m_c$$

Facciamo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t}\hat{C}(s), \quad con \quad \hat{C}(0) = 1$$

Iniziamo considerando la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno K del controllore basandoci sulle specifiche statiche

Per verificare la prima specifica non é necessaria alcuna modifica, avendo l'impianto già due poli nell'origine. La seconda specifica impone invece che il guadagno K del controllore sia almeno pari a 100. La terza specifica indica che si deve avere

$$\lim_{s\to 0} s\frac{D(s)}{1+C(s)P(s)}\frac{10}{s} \leq 0.01$$

Ne segue che K deve essere maggiore o uguale a 10^3.

I diagrammi di Bode del sistema cosí ottenuto sono riportati in fig.1 (a sinistra). Da questo diagramma si nota che il modulo in decibel del guadagno di anello alla pulsazione $\omega = 1rad/sec$ é insufficiente ai fini della terza specifica. Per soddisfare la specifica sulla robustezza è possibile incrementare il guadagno del controllore statico al valore $K = 10^6$.

Si noti che, a seguito della inversione del moto rotatorio nella coppia dentata, il comando di coppia dato sulla ruota motrice agisce sul carico in senso opposto. Ciò spiega il segno negativo per il termine moltiplicativo della $P(S)$, con conseguente contributo di $-\pi$ al diagramma delle fasi. Questo si somma al contributo di $-pi/2$ dato da ciascuno dei due poli nell'origine, per un totale sfasamento alle basse frequenze di -2π, che non viene rappresentato dai diagrammi in figura, che sono ottenuti "modulo 2π" (si faccia attenzione a interpretare correttamente il margine di fase, che è nullo nei diagrammi riportati). Per eliminare tale effetto è ovviamente sufficiente l'adozione di un termine di guadagno negativo per il controllore ($K = -10^6$), ottenendo i diagrammi di Bode in fig.2 (destra).

La specifica sulla sovraelongazione ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti dell'ordine di 0.35 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 35^o$. In termini del solo diagramma delle ampiezze, questa specifica si riflette grossolanamente nel richiedere che l'attraversamento dell'asse a $0db$ avvenga con pendenza pari anche a -2, purchè non lontano da un precedente tratto a pendenza -1 o 0.

La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve

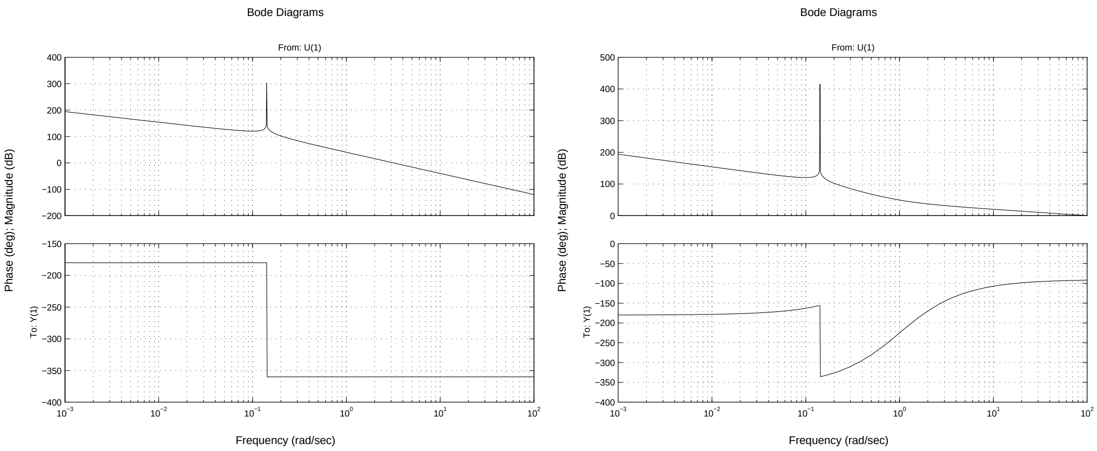


Figure 2: Diagrammi di Bode per le fasi successive del progetto

essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 100 rad/sec$. Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(\jmath\omega)G(\jmath\omega)$ intersechi l'asse a $0db$ a pulsazioni superiori a $100 rad/sec$.

Per soddisfare queste specifiche, é possibile procedere ad esempio nel seguente modo: inserire tre zeri alla pulsazione $\omega = 10^0 rad/sec$ in modo da introdurre un termine di anticipo in fase e una riduzione della pendenza del diagramma di Bode delle ampiezze di $+60db/dec$ (il diagramma), come si evince in fig.2 (destra).

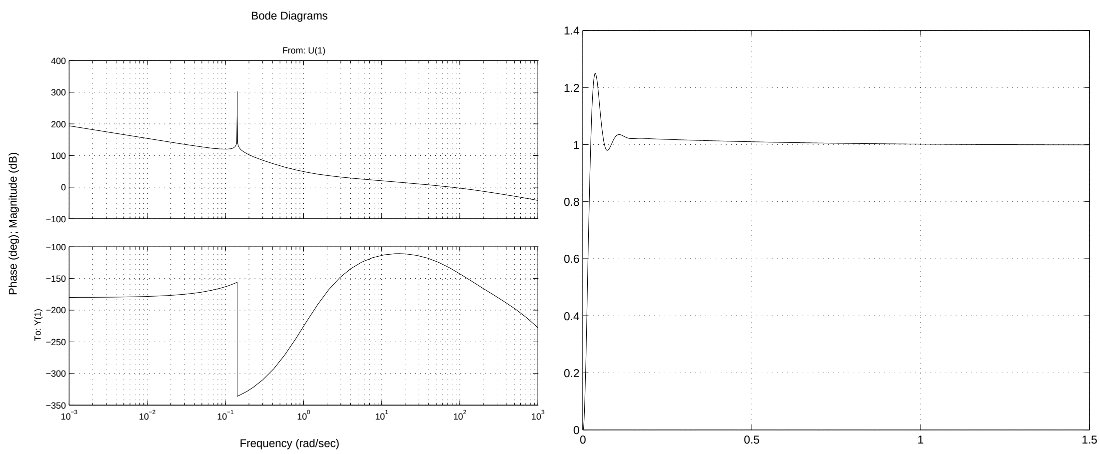
Dal diagramma si puó leggere che il margine di fase é sicuramente superiore a 35^o. La banda a $0db$ risulta circa $100 rad/sec$ che comporta un tempo di assestamento pari a quello richiesto nella specifica (4). Il controllore sinora progettato ha la seguente funzione di trasferimento

$$C(s) = -10^6 \frac{(s+1)^3}{d(s)}$$

dove $d(s)$ é necessario per rendere il controllore causale e verra' scelto nei passi successivi. Osservando il diagramma di Bode si nota che alla pulsazione $\omega = 1000 rad/sec$ (circa $160Hz$) il modulo del guadagno d'anello risulta superiore a quello richiesto nella specifica sulla reiezione dei rumori di misura. Per ridurre ulteriormente il guadagno d'anello introduciamo un polo alla pulsazione $\omega = 100 rad/sec$. Il controllore finale ottenuto, inserendo due ulteriori poli in $2000 rad/sec$ per la causalitá, risulta:

$$C(s) = -10^6 \frac{(s+1)^3}{(0.01s+1)(0.0005s+1)^2}$$

con i digrammi di Bode seguenti del guadagno d'anello e relativa risposta al gradino del sistema controllato.



- Il punto di equilibrio del sistema risulta essere $(1,0)^T$, e il linearizzato risulta:

$$A = \begin{bmatrix} -x_2 & -x_1+1 \\ 2(x_1-1) & 1 \end{bmatrix},$$

nel punto di equilibrio si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La presenza di un autovalore a parte reale positiva indica che il punto $(1,0)^T$ è un equilibrio instabile. Scelta $u = k_1(x_1-1)+k_2x_2$ si ha che il linearizzato risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 1+k_2 \end{bmatrix}.$$

In questo modo è possibile spostare solo l'autovalore a parte reale positiva ma resta comunque un autovalore a parte reale nulla e quindi non possiamo concludere dal linearizzato se l'equilibrio è asintoticamente stabile o meno.

È necessario quindi cercare una candidata di Lyapunov. Considerando la candidata suggerita si ha che $\dot{V} = 2(x_1-1)(-x_1x_2+x_2)+2x_2((x_1-1)^2+x_2+u) = 2x_2^2+2x_2u$ scegliendo $k_1 = 0$ e $k_2 = -2$ si ha $\dot{V} = -2x_2^2$ che risulta semidefinita negativa. Applicando il teorema di Krasowskii si nota che l'unica traiettoria contenuta nell'insieme N (su cui la derivata direzionale della funzione di Lyapunov di annulla) è l'equilibrio. Pertanto, con tale ingresso il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.