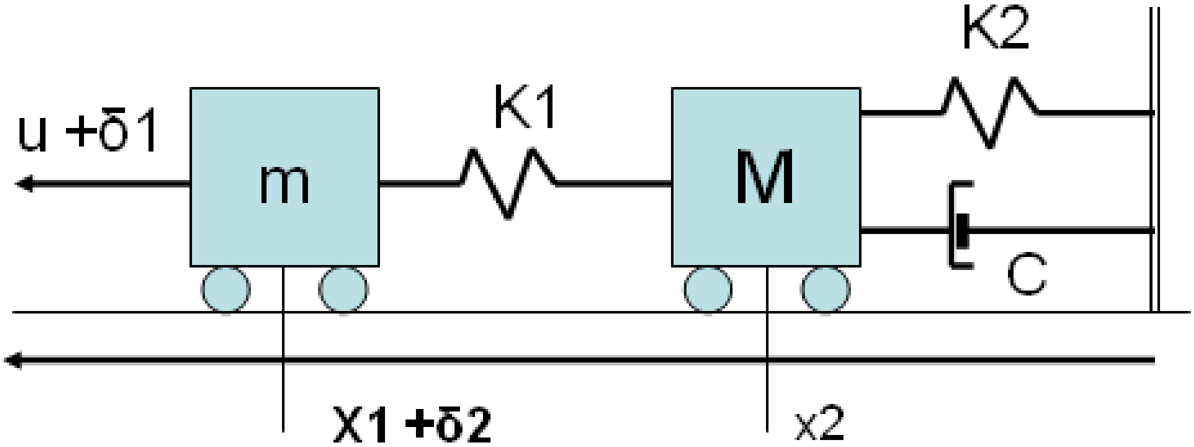
Scritto di Regolazione e controllo dei sistemi meccanici — 03 Ottobre 2002

Numero di matricola						
	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	$= 10\delta - 1$

- **(NO/VO)** Dato il sistema in figura



siano $m = 1Kg$, $M = (19 + \alpha)Kg$ le masse, $K_1 = 10^3 N/m$, $K_2 = (4 + \gamma)\ 10^2 N/m$ le elasticità e $C = (19 + \beta)Nsec/m$ il coefficiente di smorzamento viscoso. Si desidera controllare la posizione x_1 della prima massa m mediante l'applicazione di una forza di attuazione $u(t)$, nonostante la presenza di una forza di disturbo δ_1 di ampiezza limitata ma ignota. Ai fini del controllo, è disponibile la misura della posizione x_1 stessa, pur essendo questa affetta da rumore di misura δ_2.

A Progettare un sistema di controllo che garantisca le seguenti specifiche:

1. La massa m deve raggiungere a regime un riferimento di posizione assegnato in modo esatto nonostante disturbi δ_1 di tipo costante;
2. Quando sia richiesto l'inseguimento di un profilo di moto lineare del tipo $x_{1,rif} = At$, si deve garantire un errore di posizione a regime inferiore a $0.1A$;
3. Si assuma che la massa m possa differire dal valore sopra assegnato di una quantità non superiore a δm con $|\delta m|/|m| \leq 20\%$. In queste condizioni, si deve garantire che il sistema alteri il proprio funzionamento nominale y di una quantità δy in modo che la sua variazione relativa sia limitata da $|\delta y| \leq 0.01|y|$ per tutti gli ingressi con contenuto frequenziale inferiore a $\frac{10}{2\pi}Hz$.
4. Nella risposta al gradino si chiede sovraelongazione molto piccola e comunque inferiore al 5%, con un tempo di assestamento inferiore a $5msec = 5 \cdot 10^{-3}sec$;
5. il rumore di misura a frequenze maggiori o uguali di $64KHz$ deve essere reiettato nella misura di almeno lo 1%.

- **(VO)** E' dato un sistema dinamico lineare stazionario

$$A = \frac{1}{3(\gamma+1)} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \frac{\alpha+1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = 0;$$

B) Si valuti se è possibile assegnare tutti i poli del sistema in -1 con una reazione dello stato sull'ingresso di tipo proporzionale. In caso di risposta positiva si valutino i guadagni della reazione; in caso di risposta negativa si valutino i poli invarianti rispetto alla reazione.

Soluzione

A Al fine di ricavare la funzione di trasferimento del sistema scriviamo le equazioni della dinamica ottenendo:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = K_1(x_2 - x_1) + (u + \delta_1) \\ M\ddot{x}_2 = K_1(x_1 - x_2) - C\dot{x}_2 - K_2 x_2. \end{cases}$$

Se trasformiamo entrambe le equazioni della dinamica nel dominio della variabile complessa s, e supponiamo il sistema inizialmente rilassato, otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = K_1(X_2 - X_1) + (U + \Delta_1) \\ Ms^2 X_2 = K_1(X_1 - X_2) - CsX_2 - K_2 X_2. \end{cases}$$

Ricavando $X_2 = \frac{K_1}{Ms^2+Cs+K_1+K_2} X_1$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima abbiamo:

$$\{(ms^2 + K_1) - \frac{K_1 K_2}{Ms^2 + Cs + K_1 + K_2}\} X_1 = U + \Delta_1$$

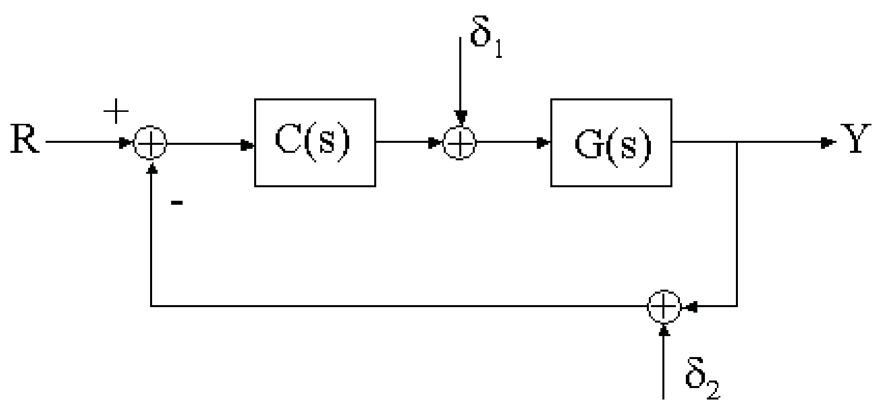
dalla quale si ottiene, considerando come uscita $y = x_1$,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tfrac{Ms^2+Cs+(K_1+K_2)}{(Ms^2+Cs+(K_1+K_2))(ms^2+K_1)-K_1^2}(U + \Delta_1) \\ &= \tfrac{Ms^2+Cs+(K_1+K_2)}{Mms^4+Cms^3+(MK+(K_1+K_2)m)s^2+CK_1 s+K_1K_2}(U + \Delta_1). \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici ad esempio nel caso $\alpha = \beta = \gamma = 1$, si ottiene

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 75}{s^4 + s^3 + 1075s^2 + 1000s + 25000}$$

Essendo l'impianto dato stabile (anche se marginalmente) e a fase minima, il progetto di prima massima può essere condotto supponendo una semplice configurazione dell'anello con un controllore $C(s)$ in catena diretta (da progettare), ed una retroazione unitaria negativa, ed operando direttamente sul diagramma di Bode delle ampiezze del sistema in catena aperta, cioè di $C(s)G(s)$ (vedi figura seguente)



La trasformata dell'uscita in funzione di tutti i segnali presenti (riferimento e disturbi), risulta

$$Y = \frac{CG}{1 + CG} R - \frac{CG}{1 + CG}\delta_2 + \frac{G}{1 + CG}\delta_1.$$

Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \tfrac{K}{s^t}\hat{C}(s), \quad con \quad \hat{C}(0) = 1 \ ,$$

iniziamo considerando la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno K del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

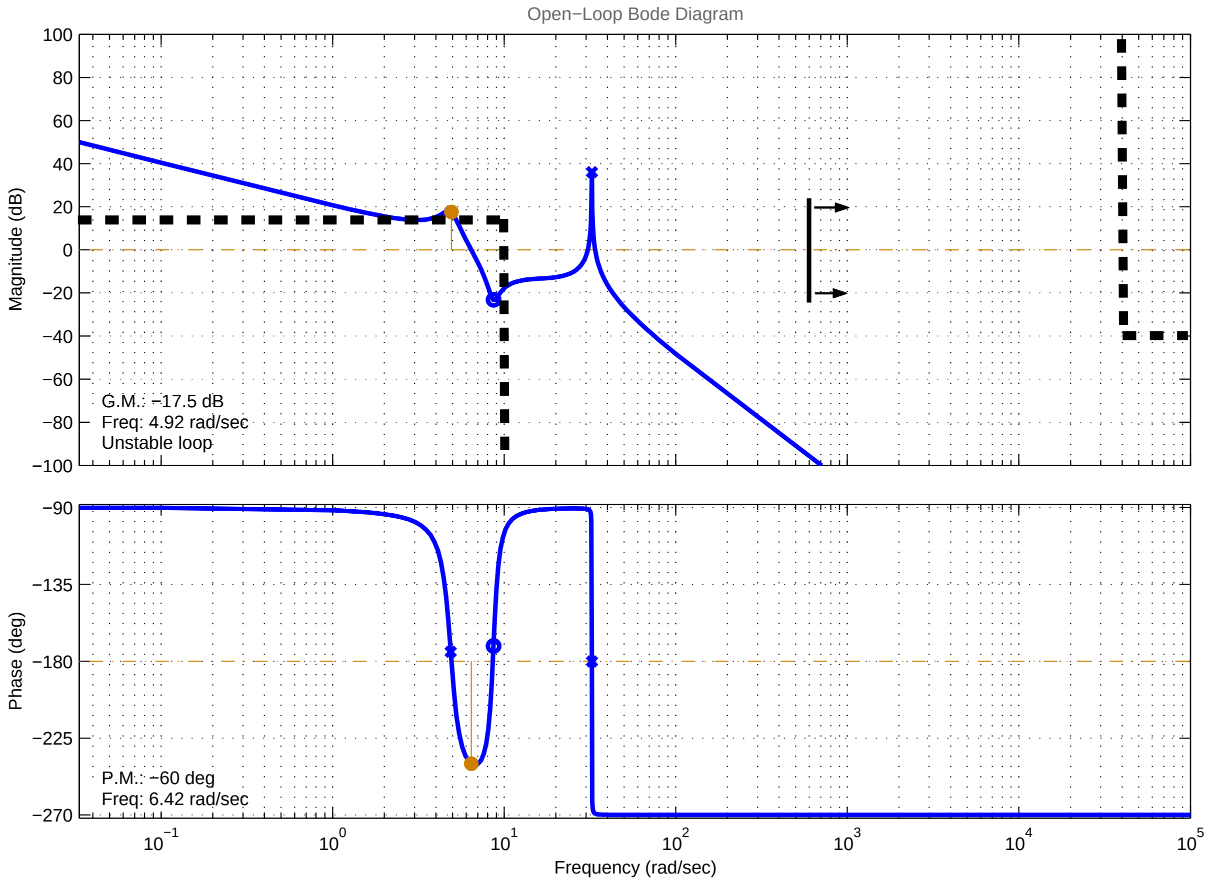


Figure 1: Diagrammi relativi al sistema $G(s)$ pre-compensato da $\frac{3500}{s}$. Si osservi come il sistema non rispetta le specifiche dinamiche riportate in figura.

Per verificare la prima specifica é necessario introdurre un polo nell'origine a monte del disturbo δ_1. In tal modo viene annulato sia l'errore a regime sia l'effetto del disturbo costante. Inoltre la costante K deve ridurre l'errore di velocitá ovvero $E_v(+\infty) = \frac{A}{KG(0)} < 0.1A$ quindi $K \geq 50000/15$. Porremo $K = 3500$.

Il luogo delle radici ed i diagrammi di Bode del sistema cosí ottenuto sono riportati in fig. (1).

Consideriamo adesso la specifica sulla robustezza alle variazioni del parametro m. Ponendo per comodità $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ e $G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = C(s)G(s)\Sigma(s)$, ricordiamo che, per un generico riferimento $R(s)$ si ha

$$y(s) = G_c(s)R(s)$$

e scrivendo, in prima approssimazione,

$$\delta y(s) \approx \frac{\partial y(s)}{\partial m}\delta m = \frac{\partial G_c(s)R(s)}{\partial G(s)}\frac{\partial G(s)}{\partial m}\delta m$$

possiamo scrivere la specifica nella forma

$$\left|\frac{\delta y(s)}{y(s)}\right| = \left|\Sigma(s)\frac{\partial G(s)}{\partial m}\frac{m}{G(s)}\frac{\delta m}{m}\right| \leq 0.01$$

Valutiamo adesso il termine $\frac{\partial G(s)}{\partial m}\frac{m}{G(s)} = \Sigma_G(s)$ di sensibilità relativa dell'impianto in anello aperto che appare nella formula precedente:

$$\Sigma_G(s) = \frac{\partial G(s)}{\partial m}\frac{m}{G(s)} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{n(s)}{d(s)}\right)\frac{md(s)}{n(s)} = -\frac{m}{d(s)}\frac{\partial d(s)}{\partial m}$$

e, trovando con semplici calcoli

$$\frac{\partial d(s)}{\partial m} = Ms^4 + Cs^3 + (K_1 + K_2)s^2$$

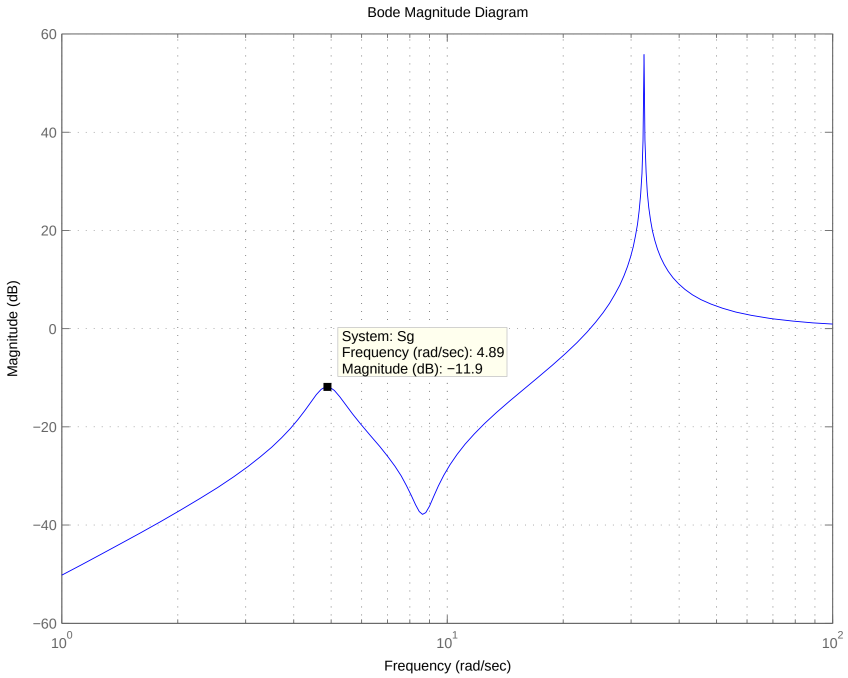
otteniamo

$$\Sigma_G(s) = m\frac{Ms^4 + Cs^3 + (K_1 + K_2)s^2}{Mms^4 + Cms^3 + (MK + (K_1 + K_2)m)s^2 + CKs + K_1K_2}$$

Dovendo in conclusione avere

$$\left|\frac{\delta y(s)}{y(s)}\right| = \left|\Sigma(s)\Sigma_G(s)\frac{\delta m}{m}\right| \leq 0.01$$

andiamo a valutare il massimo valore che il modulo di $\Sigma_G(s)$ assume per pulsazioni tra 0 e $10 rad/sec$, facendo il relativo diagramma di Bode:



Si ottiene che $\max_{0<\omega\leq 10rad/sec} |\Sigma_G(\jmath\omega)| \approx -12db \approx 1/4$. Si ha finalmente che la specifica sarà garantita se, nello stesso range di pulsazioni, si garantisce che la funzione di sensibilità dell'anello chiuso $\Sigma(s)$ sia sempre in modulo inferiore o uguale a 0.2. Ciò a sua volta è ottenuto se si realizza un controllore tale che, nello stesso campo di pulsazioni, si abbia

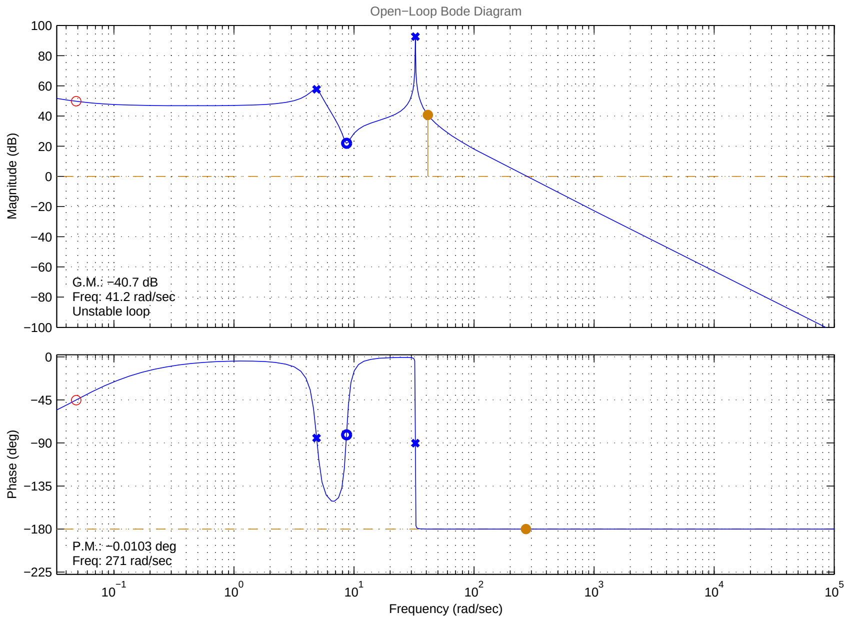
$$|C(\jmath\omega)G(\jmath\omega)| > 6$$

specifica che è riportata nella figura precedente.

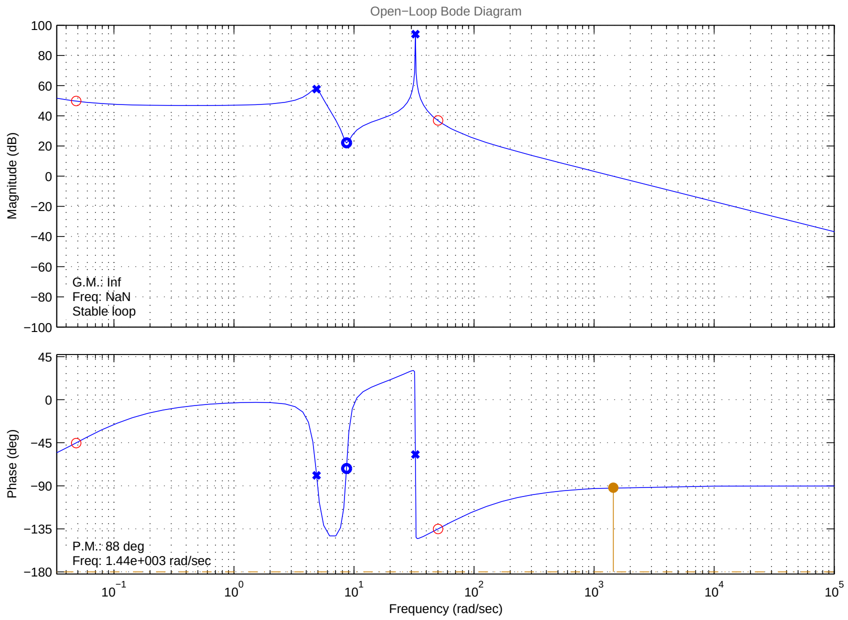
La specifica sulla piccola sovraelongazione indica che sarebbe indicato ottenere un sistema in anello chiuso con un polo dominante, quindi un margine di fase di circa 90 gradi. In questo caso, il tempo di assestamento richiesto offre indicazioni sulla pulsazione naturale $\frac{3}{\omega_n} = T_a < 5 \cdot 10^{-3} \rightarrow \omega_n > 6 \cdot 10^2$. Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(\jmath\omega)G(\jmath\omega)$ intersechi l'asse a $0db$ a pulsazioni superiori a $6 \cdot 10^2 rad/sec$. La quinta specifica è immediatamente visualizzabile sul piano di Bode (vedi figura).

Iniziamo il progetto della parte dinamica del controllore osservando che, dovendo essere il taglio in una pulsazione nella quale allo stato attuale si ha pendenza -3, avremo evidentemente bisogno di una azione anticipatrice di almeno due zeri a pulsazioni minori per ottenere un margine di fase accettabile. Procediamo dunque a piazzare questi due zeri, prima di eventualmente provvedere ad aumentare il guadagno statico per soddisfare la specifica 3.

Dal grafico sottostante si osserva che uno zero posto circa in $-1/20$ ottiene la specifica 3 senza necessità di aumentare il guadagno statico.

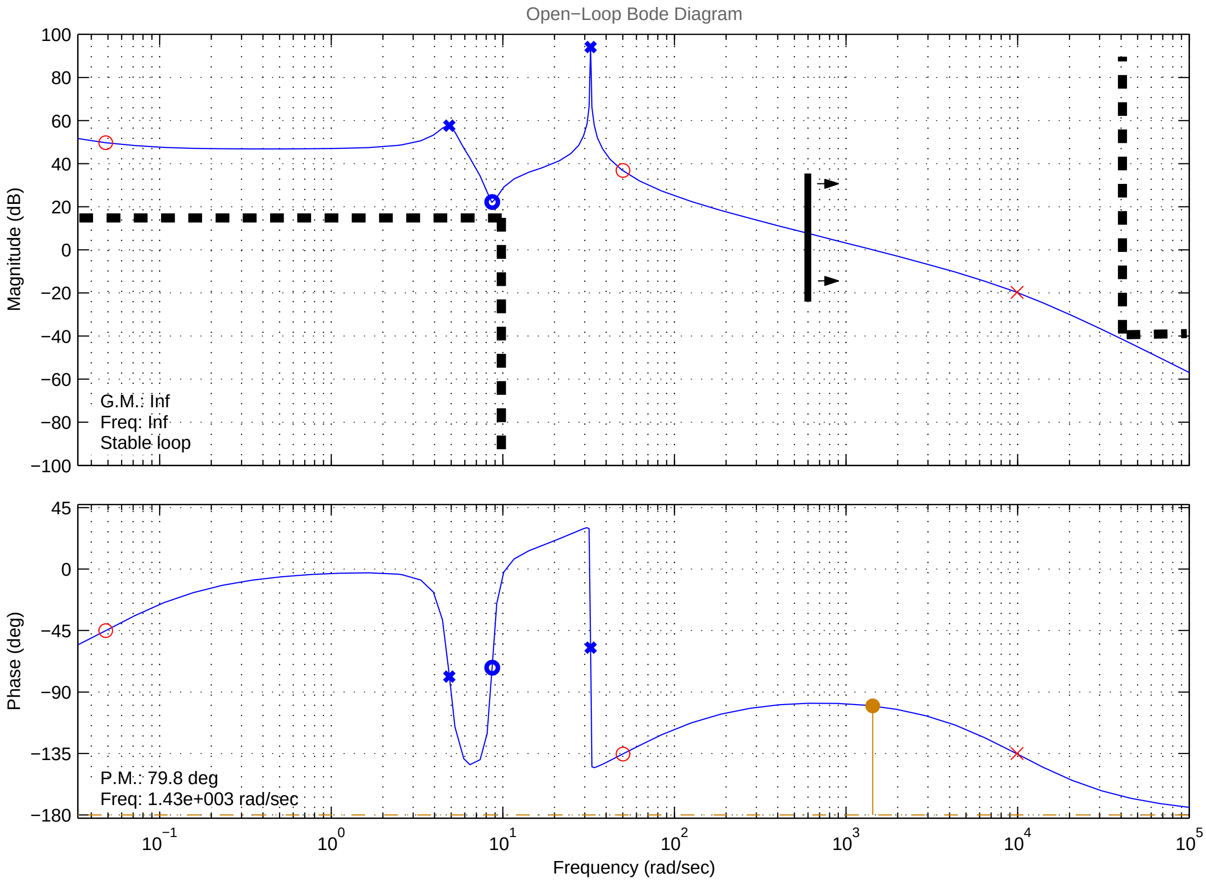


Un secondo zero può essere utilmente posto in vicinanza della coppia di poli complessi sottosmorzati, per mitigare il loro effetto risonante. Ponendo ad esempio lo zero in -50, si ottiene l'andamento seguente



Osserviamo da quest'ultimo diagramma che anche la specifica di banda passante è soddisfatta, ed il margine di fase di 88 gradi è accettabile.

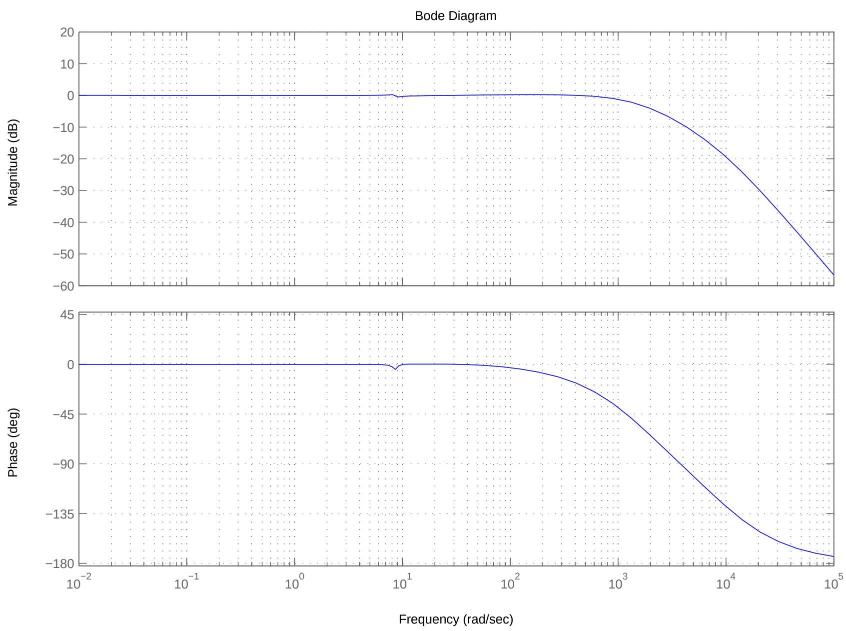
Resta a questo punto solo da imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza. Otterremo questa specifica inserendo nel compensatore un polo, cosa che è peraltro necessaria per la causalità del controllore. Ponendo il polo in -10^4, si ottiene il diagramma

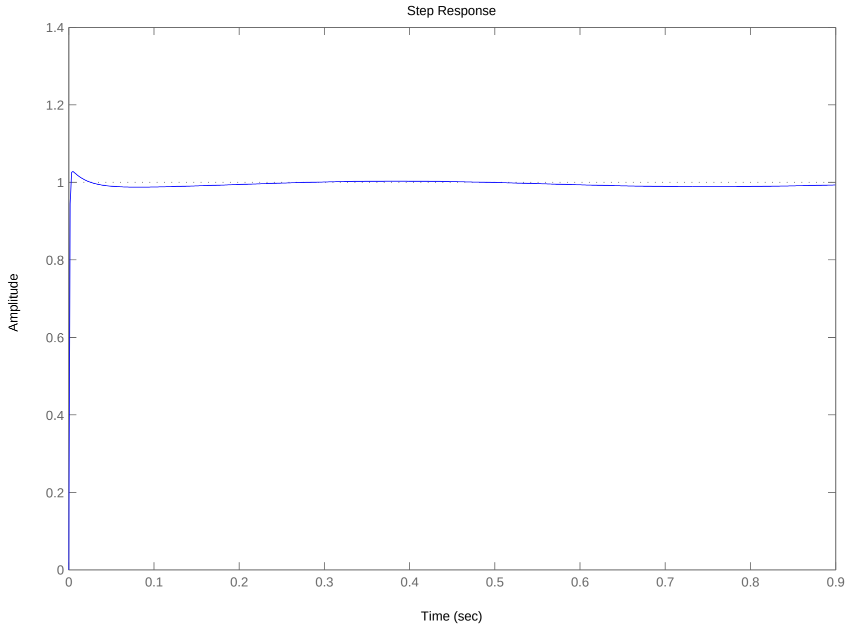


Il controllore risultante è dato da

$$C(s) = \frac{3500(1 + 20s)(1 + 0.02s)}{s(1 + 10^{-4}s)}$$

A verifica finale del progetto, riportiamo il diagramma di Bode in e la risposta al gradino del sistema in anello chiuso





B) Il sistema ha sottospazio raggiungibile di dimensione 2. Operando la scomposizione standard con la matrice $T = [B, AB, T_c]$, si ottiene immediatamente che l'autovalore esterno al sottospazio di raggiungibilita' vale $-1/(\gamma+1)$. E' quindi possibile retroazionare gli stati e porre tutti gli autovalori in -1 solo se $\gamma = 0$.