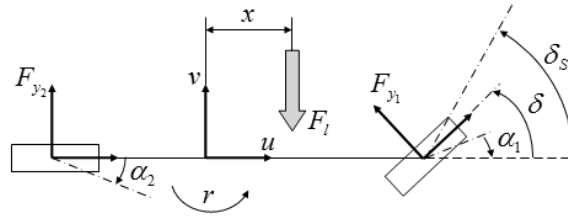


–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	–
---	---	------------------	-----------------	------------------	---

Si consideri il modello monotraccia di un autoveicolo



descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ru) &= F_{y1} + F_{y2} + F_l \\ J\dot{r} &= aF_{y1} - bF_{y2} + xF_l, \end{aligned}$$

con pneumatici dalla caratteristica lineare

$$\begin{aligned} F_{y1} &= C_1\alpha_1 \\ F_{y2} &= C_2\alpha_2, \end{aligned}$$

dove gli angoli di deriva α_1 e α_2 sono legati all'angolo di sterzo effettivo δ mediante le relazioni linearizzate

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta - \frac{v+ra}{u} \\ \alpha_2 &= -\frac{v-rb}{u}. \end{aligned}$$

La massa dell'autoveicolo è pari a $m = 1000 - 10\gamma$ [kg], il momento di inerzia rispetto al baricentro $J = 3000 + 10\beta$ [kgm²], il semipasso anteriore $a = 2$ [m] e quello posteriore $b = 1.5$ [m]. F_l è una forza di disturbo dovuta al vento laterale applicata nel punto a distanza $x = \frac{b-a}{2}$ dal baricentro del veicolo. Per quanto riguarda il modello dei pneumatici, si considerino le rigidzze di deriva degli assali anteriore e posteriore uguali e pari a $C_1 = C_2 = 100000$ [N/rad]. Si noti la caratteristica sovrasterzante del veicolo $aC_1 - bC_2 > 0$.

Il sistema di sterzo presenta una certa cedevolezza elastica, ed è descritto dalla seguente equazione

$$\delta = \delta_s - \chi\alpha_1$$

dove δ_s è il valore nominale dell'angolo di sterzo (impostato dal conducente) e $\chi = 0.5$ è il coefficiente di cedevolezza dell'impianto di sterzo.

Si supponga che sia mantenuta una velocità longitudinale costante $u = 20$ [m/s].

- A** Determinare una rappresentazione in forma di stato del sistema, considerando come ingresso l'angolo di sterzo impostato δ_s e come uscita l'angolo effettivo di sterzo δ ;
- B** Si determini la funzione di trasferimento tra δ_s e δ , e se ne traccino manualmente i diagrammi di Bode commentandoli adeguatamente;
- C** Si progetti un sistema di controllo che garantisca le seguenti specifiche:
 - C1** Errore nullo a regime nel raggiungimento di un riferimento di angolo di sterzo δ pari a $\frac{\pi}{10}$;
 - C2** Qualora si proceda in rettilineo e si sterzi improvvisamente di un angolo pari a $\frac{\pi}{10}$ (prova del colpo di sterzo), si chiede che il veicolo raggiunga il valore di $\frac{\pi}{10}$ entro una tolleranza del 5% in meno di 0.1 secondi, senza mai eccedere il valore di tolleranza;
 - C3** Supponendo che il vento vari con una frequenza non superiore a 1rad/sec ed abbia un valore limitato da $|\mathbf{F}_l(t)| \leq 10^2$, si chiede che il valore di δ non sia perturbato per più di $\pm \frac{\pi}{100}$;
 - C4** Supponendo infine che il sensore di posizione sia soggetto a rumore trascurabile a frequenze inferiori a 30KHz, e comunque limitato in ampiezza $|\nu(t)| \leq 10^{-1}rad$ nelle frequenze superiori, si chiede che ciò non generi sulla uscita perturbazioni superiori a $10^{-3}rad$.

Si riportino per esteso i passaggi seguiti nel progetto, e la espressione del controllore progettato.

Opzionale Si confronti la risposta al gradino del sistema in anello aperto con quella di un sistema identico, ma con lunghezze dei semipassi invertite ($a = 1.5m$, $b = 2m$). Si dia una interpretazione delle osservazioni fatte.

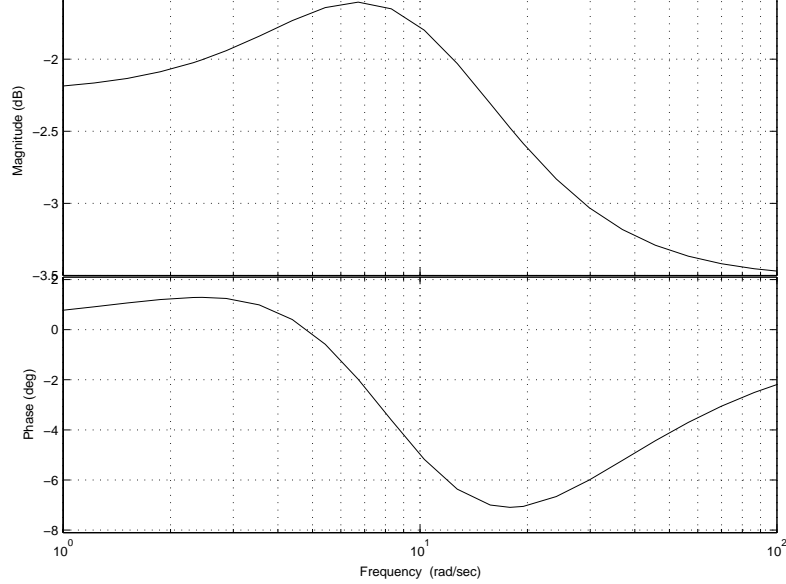


Figure 1: Diagrammi relativi al sistema $G(s)$

Soluzione

A Considerando lo spazio di stato $x = (x_1, x_2) = (v, r)$, l'equazioni dinamiche del sistema lineare sono nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\delta_s + B_F F_l \\ y = Cx + D\delta_s \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} \frac{C_1 \chi}{u(1+\chi)m} - \frac{C_1 + C_2}{mu} & \frac{C_2 b - C_1 a}{mu} + \frac{C_1 \chi a}{u(1+\chi)m} - u \\ \frac{C_1 \chi a}{u(1+\chi)J} + \frac{C_2 b - C_1 a}{Ju} & -\frac{C_1 a^2 + C_2 b^2}{Ju} + \frac{\chi a^2 C_1}{u(1+\chi)J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{(1+\chi)m} \\ \frac{C_1 a}{(1+\chi)J} \end{bmatrix} \quad B_F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} \\ -\frac{x}{J} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\chi}{u(1+\chi)} & \frac{\chi a}{u(1+\chi)} \end{bmatrix} \quad D = \frac{1}{(1+\chi)}$$

A rigore la forma di stato del sistema SISO non comprende il termine di B_F dovuto al disturbo, non essendo esso un ingresso disponibile per il progettista.

B Sostituendo i valori numerici, la funzione di trasferimento fra l'uscita di misura δ e l'ingresso di controllo δ_s risulta

$$G(s) = \frac{0.6667s^2 + 13.61s + 56.94}{s^2 + 16.53s + 73.61}$$

La f.d.t., rappresentata in figura 1, risulta propria ma non strettamente (si noti l'andamento del digramma delle ampiezze) ed asintoticamente stabile.

Per completezza si riporta anche la funzione di trasferimento del disturbo

$$D(s) = \frac{-1.389e - 005s - 0.0001493}{s^2 + 16.53s + 73.61}$$

che, in forma di Bode risulta

$$D(s) = -2 \cdot 10^{-6} \frac{\left(\frac{s}{10.75} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{73.61} + 0.224s + 1\right)}$$

La funzione di trasferimento del disturbo presenta un'attenuazione alle basse frequenze, due poli complessi coniugati a parte reale negativa ed uno zero a parte reale negativa. I diagrammi relativi a questa funzione di trasferimento sono riportati in figura 2.

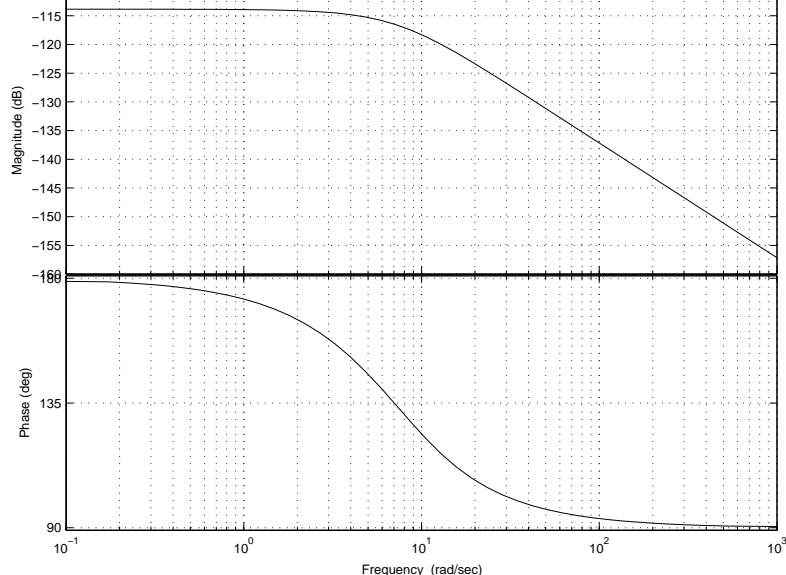


Figure 2: Diagrammi relativi al sistema $D(s)$

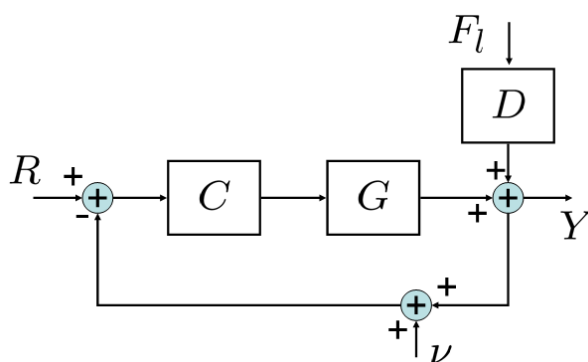


Figure 3: Diagramma a blocchi del progetto di controllo relativo a $G(s)$

- C Il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode poiché la $G(s)$ è a fase minima. Il sistema a blocchi associato al progetto del controllore per il sistema in esame è rappresentato in figura 3.

La trasformata dell'uscita in funzione di tutti i segnali presenti, nei quali è stato aggiunto il rumore di misura risulta

$$Y = \frac{CG}{1+CG}R + \frac{D}{1+CG}\Delta - \frac{CG}{1+CG}\nu.$$

Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C_1(s) = \frac{k}{s^t} \hat{C}_1(s), \quad \text{con } \hat{C}_1(0) = 1,$$

iniziamo considerando la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno k del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

- C1 Il riferimento costante e pari a $\bar{\delta} = \frac{\pi}{10}$ può essere assimilato ad un gradino di ampiezza $\bar{\delta}$. Per il teorema del valore finale, la funzione d'anello CG deve presentare almeno un polo nell'origine. Non avendo G tale polo, si rende necessaria l'aggiunta di tale singolarità nell'origine tramite il controllore, che risulterà

$$C = \frac{1}{s}.$$

I diagrammi di Bode risultanti sono riportati in figura 4

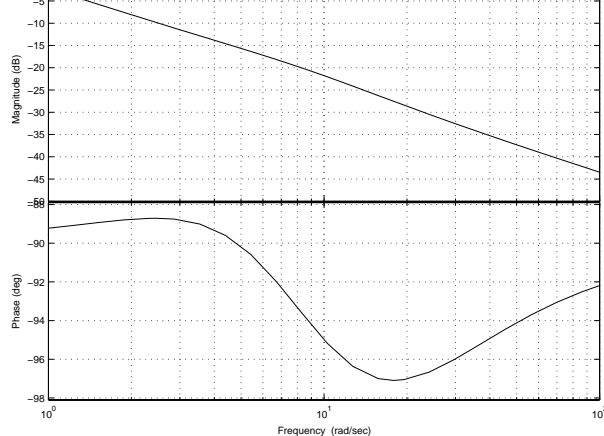


Figure 4: Guadagno d'anello con l'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore.

- C2** La specifica richiede che la sovralongazione ed il tempo di assestamento del sistema controllato siano relative ad un polo dominante con pulsazione naturale $\omega_n = \frac{3}{T_a} \geq 30[\text{rad/sec}]$. Si richiede quindi che la pulsazione di taglio in anello aperto sia a pulsazioni maggiori di $30[\text{rad/sec}]$ con una pendenza di -20db/dec . Cautelativamente è stata scelta una approssimazione ad un polo dominante data la presenza di singolarità nei pressi della frequenza di taglio.
- C3** Il progetto del controllore renderà il sistema controllato asinoticamente stabile, è quindi applicabile il teorema della risposta armonica. La specifica C3 è equivalente a richiedere che per pulsazioni minori di $1[\text{rad/sec}]$ si abbia: $\left| \frac{D(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right| < 10^{-4}\pi$. Se il modulo del guadagno d'anello $|CG| \gg 1$ nell'intervallo di frequenze di interesse, la specifica si traduce in $\left| \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)G(j\omega)} \right| = \left| \frac{N_D}{C \frac{N_G}{D_G}} \right| = \left| \frac{N_D}{C N_G} \right| < 10^{-4}\pi$, dove $D(s) = \frac{N_D(s)}{D_D(s)}$ e $G(s) = \frac{N_G(s)}{D_D(s)} = \frac{N_G(s)}{D_D(s)}$. In figura 5 sono riportati i diagrammi di Bode

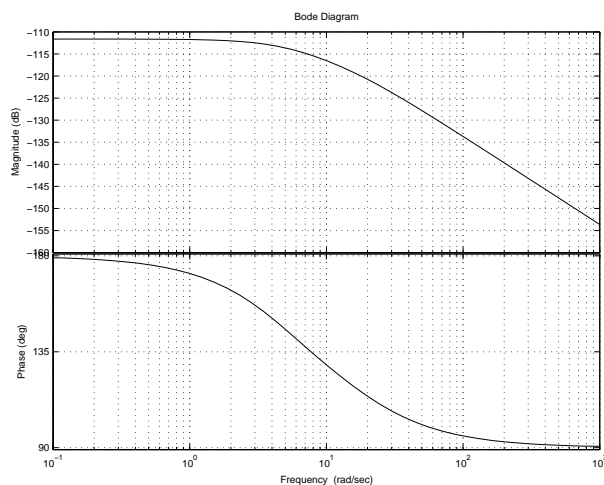


Figure 5: Diagramma di Bode della funzione complessa $\frac{N_D}{N_G}$

della funzione $\frac{N_D}{N_G}$. Il modulo della suddetta funzione nel range di frequenza di interesse risulta minore di -110dB , quindi la specifica si traduce nell'imporre un modulo minimo al controllore in modo che sia verificata $\left| \frac{N_D}{N_G} \right|_{\text{dB}} - |C|_{\text{dB}} < 20 \log \frac{\pi}{10^4} \Rightarrow |C|_{\text{dB}} > -40\text{dB}$. Si noti che la specifica è verificata in questo modo se è vero che $|CG| \gg 1$.

- C4** La funzione di trasferimento tra il disturbo sul sensore di posizione e l'uscita è $\Delta(s) = -\frac{CG}{1+CG}\nu(s)$. Per pulsazioni maggiori di $188[\text{Krad/sec}]$ si vuole un basso guadagno della funzione d'anello CG e quindi si richiede:

$$|CG|_{\text{db}} < |10^{-3}|_{\text{db}} - |10^{-1}|_{\text{db}} = -40\text{db}.$$

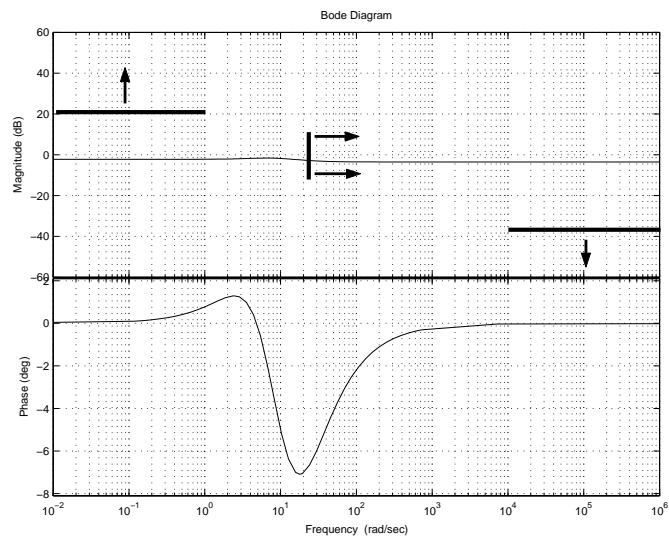


Figure 6: Diagrammi di Bode con specifiche relative al progetto del controllore per $G(s)$

La specifica C2 si soddisfa introducendo un'azione anticipatrice con uno zero in bassa frequenza, ad esempio in 10^{-2} , seguito da un polo (ipotesi di polo dominante) piazzato una decade dopo lo zero. Con una adeguata scelta del guadagno statico del controllore è possibile verificare le ipotesi semplificative della specifica C3 e contestualmente rafforzare le ipotesi di polo dominante (vedi figura 7). Dalla figura si può notare che anche la specifica C4 viene rispettata.

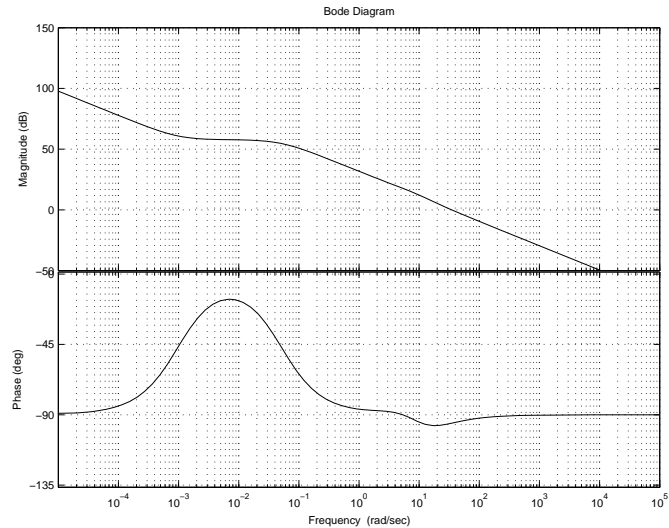


Figure 7: Diagrammi di Bode con la specifica C2 e C3 soddisfatta

Il controllore ottenuto risulta

$$C(s) = \frac{s + 0.001}{s(s + 0.05)}$$

In figura 8 si riporta per completezza la risposta al gradino del sistema controllato.

Si noti come l'approssimazione del primo ordine non sia verificata nella risposta al gradino a causa della vicinanza delle singolarità del sistema alla frequenza di taglio.

Opzionale La risposta al gradino del sistema in anello aperto per il primo caso è riportata in figura 9. Si può da subito notare come la risposta al gradino parta da un valore $\neq 0$.

Nel secondo caso la risposta al gradino è riportata in figura 10. In questo caso il veicolo è di tipo sottosterzante (come la maggior parte dei veicoli commerciali attuali), il che significa che il veicolo

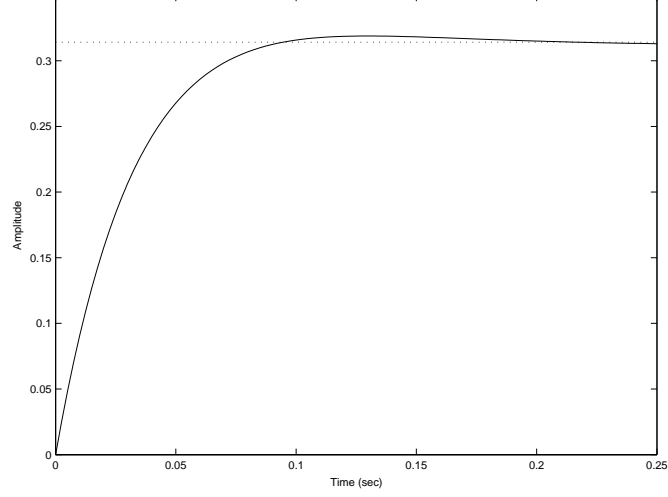


Figure 8: Risposta al gradino di ampiezza $\frac{\pi}{10}$

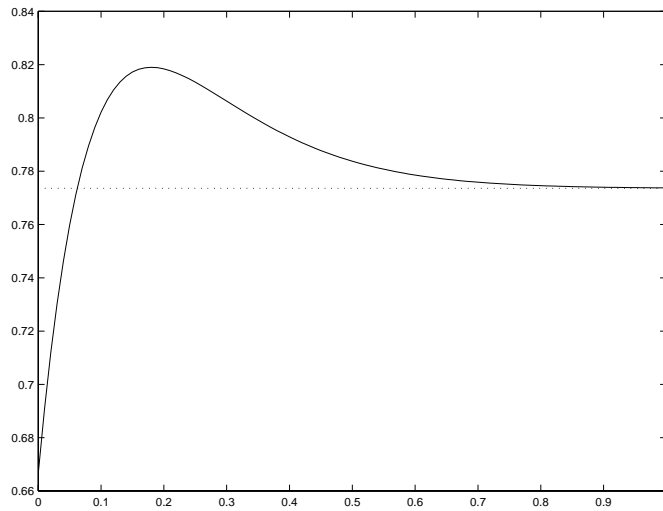


Figure 9: Risposta al gradino di ampiezza unitaria nel caso di autoveicolo sovrasterzante

risponde con un angolo di sterzo inferiore a quanto effettivamente impostogli dallo sterzo: il veicolo risponderà quindi più lentamente rispetto al primo caso. Si noti inoltre che a causa di questo effetto, il veicolo ha anche una sovraelongazione minore.

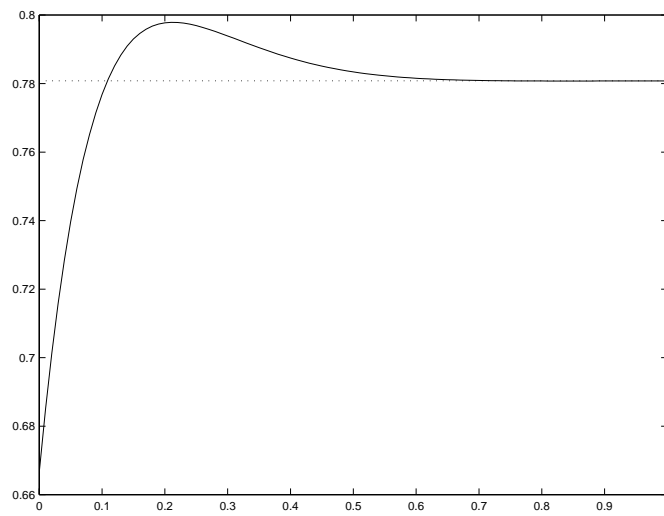


Figure 10: Risposta al gradino di ampiezza unitaria nel caso di autoveicolo sottosterzante