

Regolazione e Controllo (solo V.O.) — I Parte — 7 Settembre 2004

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	-----------------	------------------	---

Si consideri il sistema meccanico di fig.1, costituito da due masse mobili (pari rispettivamente a $m_1 = 200 + \alpha$ kg e $m_2 = 20 + \beta$ kg), collegate tra loro e al telaio dagli elementi elastici $k_1 = 5000$ N/m, $k_2 = 1000$ N/m, $k_3 = 5000$ N/m, e da un dissipatore meccanico $c = 1000$ N s/m. Il sistema è attuato da una forza f applicata sulla massa m_2 , mentre un disturbo d può agire sulla massa m_1 .

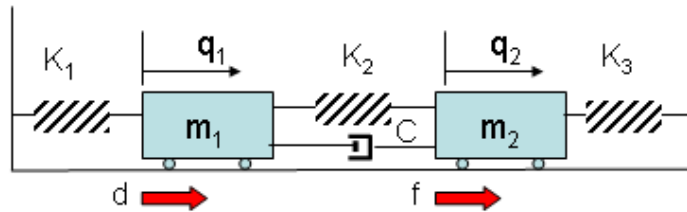


Figure 1: Sistema meccanico da controllare

- A) Si descrivano i modi del sistema in evoluzione libera;
- B) Si descriva l'effetto sulla posizione della massa m_2 di un disturbo $d = 1000 \sin(\pi t) + 3000 \cos(3\pi t + \pi/2)$ (dove t rappresenta il tempo, misurato in secondi), quando si supponga $f \equiv 0$;
- C) Si progetti un controllore in retroazione che usi la misura della posizione della massa m_2 e il controllo dell'ingresso f , in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
- errori nulli a regime nell'inseguimento di riferimenti a gradino, anche in presenza di disturbo d costante ma limitato;
 - errori minori del 5% nell'inseguimento di riferimenti a rampa;
 - tempo di assestamento $T_a \leq 1$ s e sovraelongazione nulla;
 - attenuazione di un fattore 10^5 delle componenti del disturbo d con frequenza pari o inferiore a 0.05 Hz;
 - attenuazione di un fattore 10^4 delle componenti del rumore di misura sulla posizione di m_2 con frequenze pari o superiori a 1000 Hz;

Si commentino i passaggi effettuati durante le fasi di progetto del controllore e si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode asintotici.

Soluzione

A) Scegliendo come variabili di configurazione del sistema la posizione delle due masse, indicate con

$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, le equazioni di moto del sistema sono

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 + k_2 (q_1 - q_2) + c(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= d \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_3 q_2 + k_2 (q_2 - q_1) + c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= f \end{aligned}$$

da cui, scegliendo come vettore di stato $x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$, e considerando i due ingressi $u = \begin{bmatrix} f \\ d \end{bmatrix}$ e le

due uscite $y = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix}$, le matrici del sistema in forma di stato risultano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B = [B_f \mid B_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I modi del sistema sono tutte e sole le funzioni che appaiono nella evoluzione libera, cioè in e^{At} . Per evidenziarli, basterà porre il sistema in opportune coordinate, che trasformino A in forma di Jordan. Essendo gli autovalori di A (per qualsiasi valore numerico assegnato alle masse) tutti distinti, la forma di Jordan è semplicemente la forma diagonale. Essendo due degli autovalori reali negativi, e due complessi coniugati a parte reale negativa, tutti i modi sono convergenti a zero, due con esponenziali semplici e due con oscillazioni sinusoidali. Per il caso $\alpha = \beta = 5$, si hanno ad esempio i modi $\exp(-39.16t)$, $\exp(-4.4t)$, $\exp(-0.66t) \sin(6.26t)$ e $\exp(-0.66t) \cos(6.26t)$.

B) L'evoluzione forzata del sistema viene studiata facilmente mediante la sua funzione di trasferimento. Con semplici calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} (m_1 s^2 + cs + k_1 + k_2) X_1(s) &= (cs + k_2) X_2(s) + D(s) \\ (m_2 s^2 + cs + k_3 + k_2) X_2(s) &= (cs + k_2) X_1(s) + F(s) \end{aligned}$$

da cui, posto per convenienza di notazione $P_1(s) = (m_1 s^2 + cs + k_1 + k_2)$, $P_2(s) = (m_2 s^2 + cs + k_3 + k_2)$, $Q(s) = (cs + k_2)$, si ottiene

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} F(s) + \frac{P_2(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} D(s) \\ X_2(s) &= \frac{P_1(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} F(s) + \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} D(s) \end{aligned}$$

ovvero, in forma di matrice di funzioni di trasferimento,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = G(s)U(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_1(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} & \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} \\ \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} & \frac{P_2(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ D(s) \end{bmatrix}.$$

La risposta forzata richiesta è quella tra il disturbo $D(s)$ e la uscita $Y_1(s) = X_2(s)$, ovvero

$$G_d(s) = \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2} = \frac{cs + k_2}{(m_1 s^2 + cs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + cs + k_3 + k_2) - (cs + k_2)^2}.$$

La risposta richiesta sarà formata dalla somma di una risposta libera (contente i modi sopra discussi), di una risposta transitoria, e di una risposta a regime. Quest'ultima può essere descritta, per il teorema di risposta armonica, valutando $G_d(j\pi)$ e $G_d(j3\pi)$. Per esempio, se $\alpha = \beta = 5$, la risposta a regime vale

$$x_2(t) = 0.1 \sin(\pi t + 0.4252) + 0.26 \cos(3\pi t - 1.23).$$

C) La funzione di trasferimento tra la forza di controllo $F(s)$ e l'uscita $X_2(s)$ è

$$G_f(s) = \frac{P_1(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2},$$

mentre quella tra la forza di disturbo $D(s)$ e $X_2(s)$ è già stata scritta e vale:

$$G_d(s) = \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2}.$$

Nel caso $\alpha = \beta = 5$, sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$G_f(s) = \frac{0.04(s^2 + 4.878s + 29.27)}{(s + 39.16)(s + 4.405)(s^2 + 1.313s + 39.59)},$$

$$G_d(s) = \frac{0.19512(s + 1)}{(s + 39.16)(s + 4.405)(s^2 + 1.313s + 39.59)}.$$

Le due funzioni di trasferimento $G_f(s)$ e $G_d(s)$ hanno, ovviamente, lo stesso denominatore e sono asintoticamente stabili in anello aperto. I rispettivi diagrammi di Bode, per il caso $\alpha = \beta = 5$, sono riportati in fig.2 e fig.3.

Si consideri ora lo schema di controllo di fig.4. Essendo la funzione di trasferimento $G_f(s)$ asintoticamente stabile in anello aperto e a fase minima, il progetto di un controllore che permetta al sistema chiuso in retroazione di soddisfare le specifiche può essere affrontato direttamente sul diagramma di Bode delle ampiezze.

Si consideri un controllore del tipo $C(s) = \frac{K}{s^r} C_1(s)$, con $C_1(0) = 1$. Per soddisfare le specifiche statiche, è necessario scrivere le funzioni di trasferimento tra l'errore $E(s)$ e il riferimento $R(s)$ e tra l'errore e il disturbo $D(s)$

$$E(s) = \frac{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2 + P_1(s)C(s)} R(s) - \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s) - Q(s)^2 + P_1(s)C(s)} D(s)$$

e ricordare la relazione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s).$$

La specifica sull'errore nell'inseguimento di riferimenti a gradino in presenza di disturbi costanti impone che valgano le due relazioni

$$\frac{P_1(0)P_2(0) - Q(0)^2}{P_1(0)P_2(0) - Q(0)^2 + P_1(0)C(0)} = 0,$$

$$\frac{Q(0)}{P_1(0)P_2(0) - Q(0)^2 + P_1(0)C(0)} = 0.$$

Dal momento che le quantità $P_1(0)$, $P_2(0)$ e $Q(0)$ sono finite, la specifica è soddisfatta inserendo nel controllore un polo nell'origine.

La specifica sull'errore nell'inseguimento di riferimenti a rampa richiede invece che il guadagno K del controllore rispetti la relazione

$$K > \frac{P_1(0)P_2(0) - Q(0)^2}{0.05P_1(0)} = \frac{1}{0.05G_f(0)} = 1.167 \cdot 10^5.$$

Al guadagno statico del controllore viene quindi assegnato il valore $K = 1.2 \cdot 10^5$. I diagrammi di Bode del sistema $\frac{K}{s} G_f(s)$ sono riportati in fig.5 per il caso $\alpha = \beta = 5$.

• Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione, è possibile approssimare il sistema in retroazione ad un sistema a un solo polo dominante con pulsazione naturale $\omega_n \geq \frac{3}{T_a} = 3$ rad/s. È quindi sufficiente che il diagramma delle ampiezze della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_f(s)$ tagli l'asse 0 db ad una pulsazione superiore a 3 rad/s, con pendenza di -20 db/dec.

Al fine di attrarre nel semipiano a parte reale negativa i poli del sistema in anello chiuso, si utilizzi un'azione anticipatrice, inserendo nel controllore uno zero in -10 e un polo in -200; in questo modo si ottiene un sistema asintoticamente stabile in anello chiuso, con margine di fase di 33 gradi e con pulsazione di taglio di 14.8 rad/s. Per soddisfare la specifica sul margine di fase è possibile inserire nel controllore un altro zero in -10, ottenendo così un margine di fase di 97.9 gradi e una pulsazione di taglio di 34.1 rad/s. I diagrammi di Bode della funzione di anello $C(s)G_f(s)$ che soddisfa la specifica sono riportati in fig.6; si noti che il controllore è causale, anche se non strettamente.

- Il legame tra disturbo $D(s)$ e uscita $X_2(s)$ vale, in anello chiuso:

$$X_2(s) = \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G_f(s)}D(s)$$

Applicando il teorema della risposta armonica, per avere un'attenuazione di un fattore 10^5 delle componenti del disturbo con frequenza pari o inferiore a 0.05 Hz è necessario che sia soddisfatta la relazione $\frac{|G_d(j\omega)|}{|1+C(j\omega)G_f(j\omega)|} \leq \frac{1}{10^5}$ per $\omega \leq 0.3$ rad/s. Dal momento che, a bassa frequenza, il modulo $|C(j\omega)G_f(j\omega)|$ è elevato, la relazione appena scritta può essere sostituita dalla seguente:

$$\frac{|C(j\omega)G_f(j\omega)|}{|G_d(j\omega)|} \geq 10^5$$

La specifica è quindi soddisfatta se per $\omega \leq 0.3$ rad/s vale la condizione:

$$|C(j\omega)G_f(j\omega)|_{db} \geq 100 + |G_d(j\omega)|_{db}$$

Se infine si considera che, per $\omega \leq 0.3$ rad/s, $|G_d(j\omega)|$ è circa costante e pari a -91 db, la relazione da verificare è:

$$|C(j\omega)G_f(j\omega)|_{db} \geq 9.$$

Come si osserva in fig.6 questa specifica risulta già soddisfatta.

- La funzione di trasferimento tra il disturbo di misura $\nu(s)$ e l'uscita $X_2(s)$ è la seguente:

$$X_2(s) = -\frac{C(s)G_f(s)}{1 + C(s)G_f(s)}\nu(s).$$

Applicando ancora una volta il teorema della risposta armonica, le componenti del rumore di misura vengono attenuate di un fattore 10^4 nel caso in cui, per pulsazioni superiori a 6300 rad/s, vale la relazione:

$$\frac{|C(j\omega)G_f(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G_f(j\omega)|} \leq \frac{1}{10^4}$$

Dal momento che, per frequenze elevate, si vuole un basso valore di $|C(j\omega)G_f(j\omega)|$, la relazione precedente diventa:

$$|C(j\omega)G_f(j\omega)|_{db} \leq -80$$

per $\omega \geq 6300$ rad/s. La specifica viene soddisfatta inserendo nel controllore un polo ad alta frequenza, ad esempio in -300.

Alla fine si ottiene quindi il controllore $C(s) = 1.2 \cdot 10^5 \frac{(1+0.1s)^2}{s(1+0.005s)(1+0.0033s)}$, un margine di fase di 91.5 gradi e una pulsazione di taglio di 33.8 rad/s. I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_f(s)$ vengono riportati in fig.7, mentre la risposta al gradino del sistema in retroazione è riportata in fig.8.

Infine, a conferma dei risultati trovati, in fig.9 e fig.10 si riportano, per il sistema chiuso in retroazione, i contributi nella risposta a regime rispettivamente di un disturbo $d(t)$ sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione pari a 0.3 rad/s e di un disturbo di misura $\nu(t)$ sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione pari a 6300 rad/s. Come si nota nelle due figure le specifiche richieste sono ampiamente soddisfatte.

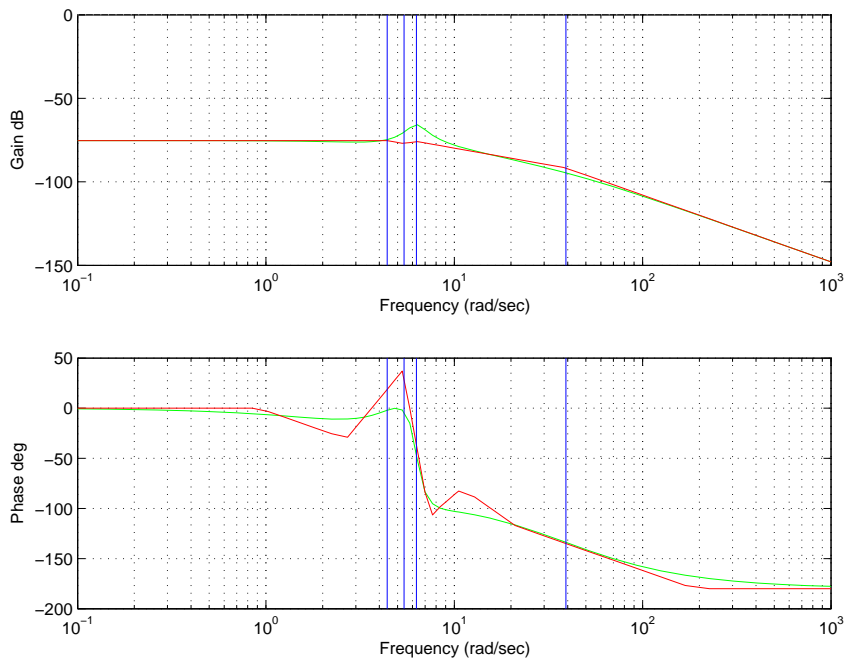


Figure 2: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_f(s)$

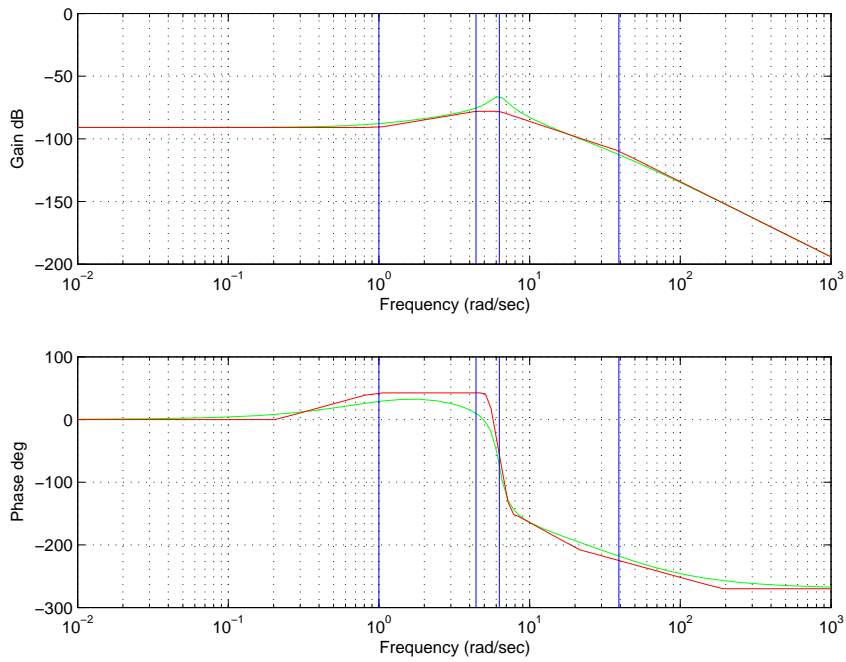


Figure 3: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_d(s)$

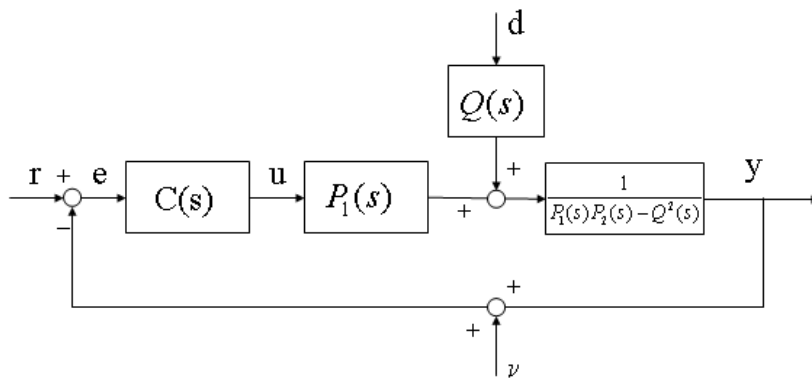


Figure 4: Schema del sistema di controllo

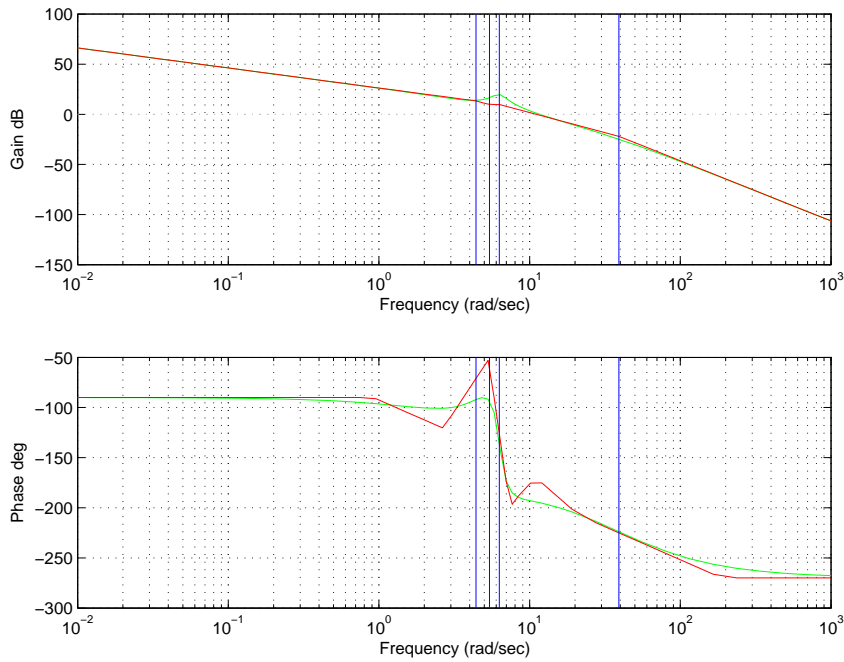


Figure 5: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_f(s)$ con $C(s) = \frac{1.2 \cdot 10^5}{s}$

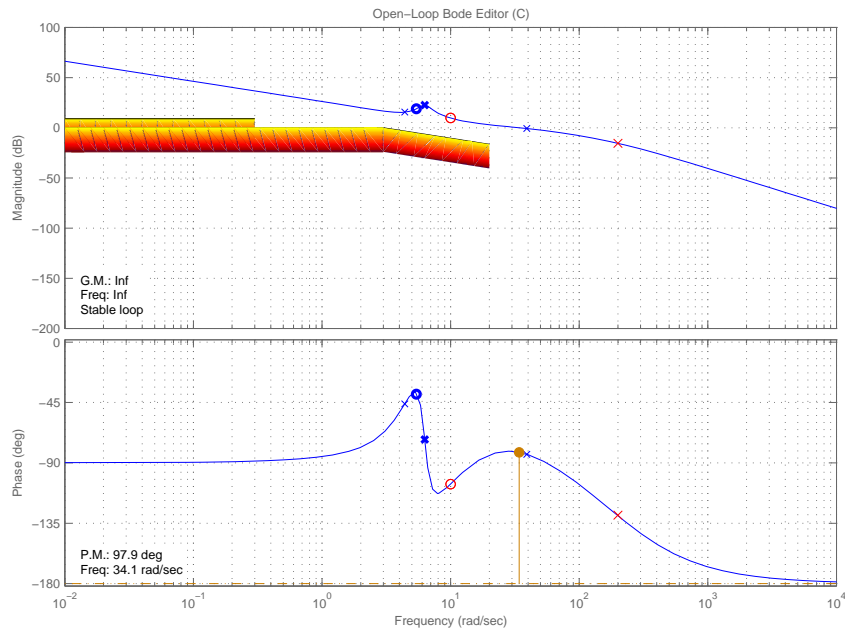


Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_f(s)$ con $C(s) = 1.2 \cdot 10^5 \frac{(1+0.1s)^2}{s(1+0.005s)}$

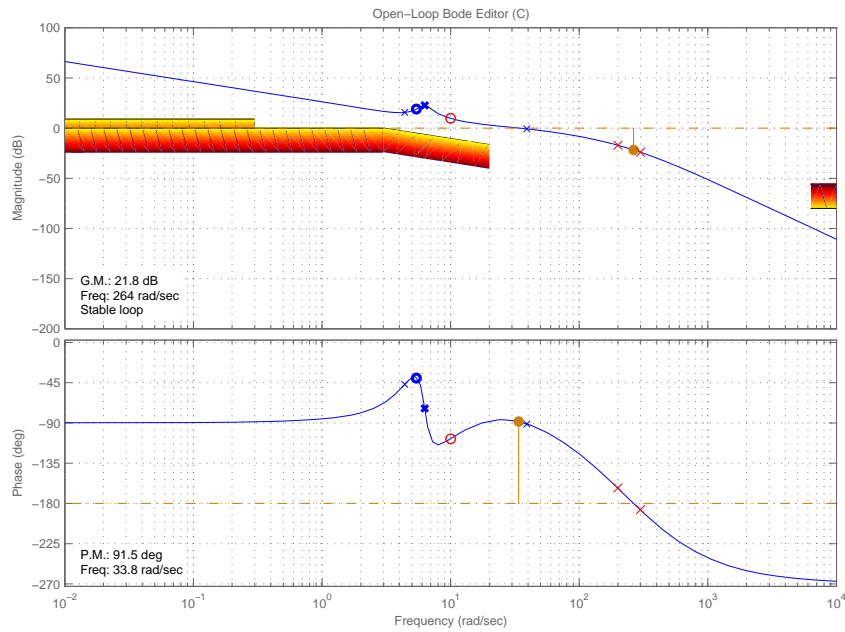


Figure 7: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_f(s)$ con $C(s) = 1.2 \cdot 10^5 \frac{(1+0.1s)^2}{s(1+0.005s)(1+0.0033s)}$

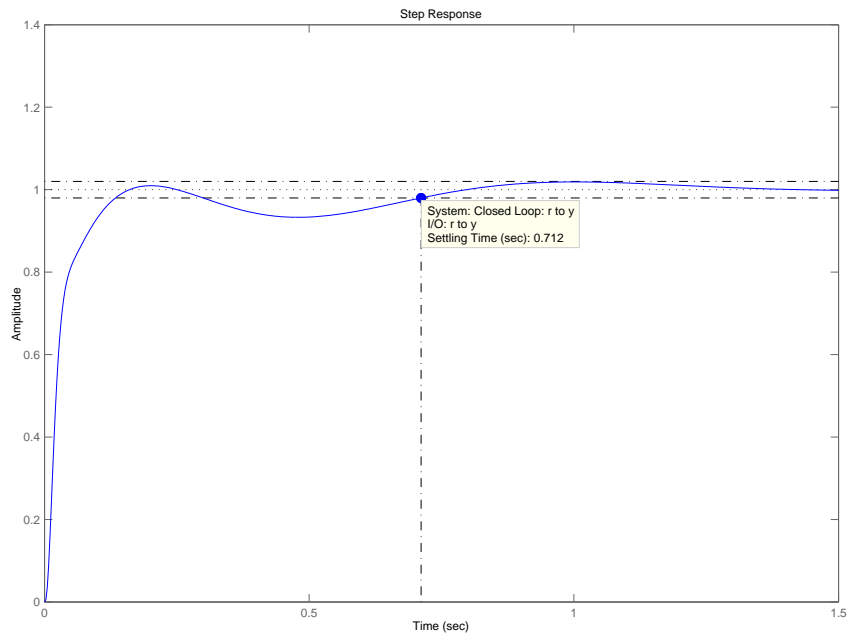


Figure 8: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione

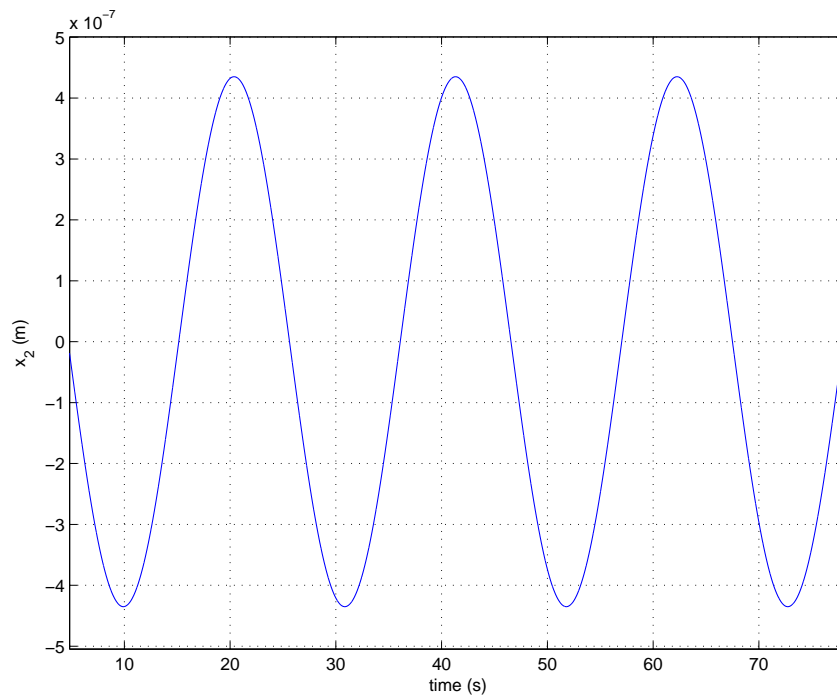


Figure 9: Risposta a regime del sistema chiuso in retroazione: contributo di un disturbo $d(t)$ sinusoidale con ampiezza unitaria e pulsazione $\omega = 0.3$ rad/s

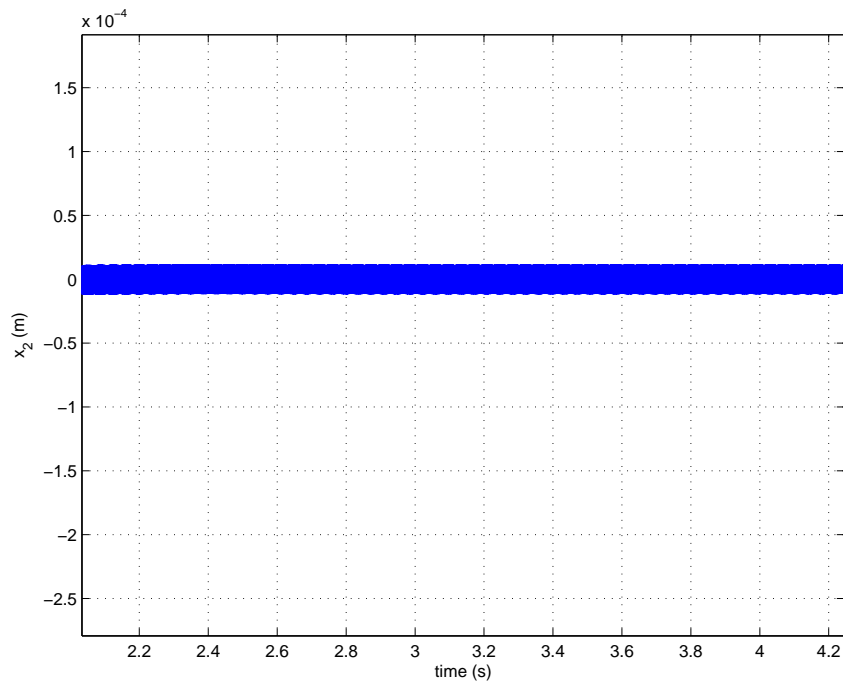


Figure 10: Risposta a regime del sistema chiuso in retroazione: contributo di un disturbo di misura $\nu(t)$ sinusoidale con ampiezza unitaria e pulsazione $\omega = 6300$ rad/s