

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	-----------------	------------------	---

Si consideri il sistema riportato in fig.1 costituito da un rotore interno di inerzia  $I_i$  e attuato da una coppia motrice  $\tau$ , da un rotore esterno di inerzia  $I_e$ , e da un corpo sferico di massa  $m$  che è libero di scivolare su un piano in assenza di attrito ed è collegato al rotore esterno da un elastico di rigidezza  $K$ . Il moto rotazionale del rotore interno è trasferito al rotore esterno sfruttando l'attrito generato da un fluido viscoso di viscosità  $\rho$  che riempie lo spazio interposto tra i due rotori.

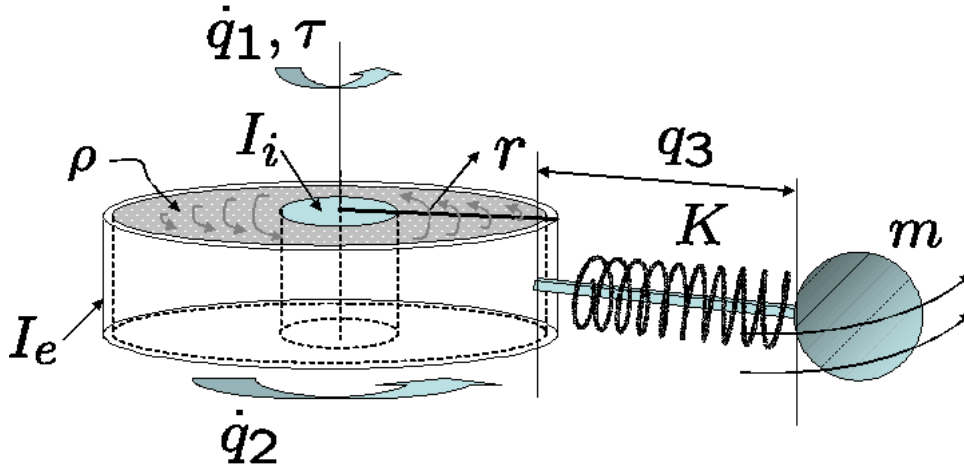


Figure 1: Sistema proposto per la movimentazione del corpo sferico.

Supposti ammissibili i soli moti radiali del corpo sferico, il sistema risulta descritto dalla seguente equazione dinamica

$$\begin{cases} I_i \ddot{q}_1 + \rho(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = \tau, \\ (I_e + m(q_3 + r)^2) \ddot{q}_2 + \rho(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + 2m(q_3 + r)\dot{q}_2\dot{q}_3 = 0, \\ m\ddot{q}_3 + Kq_3 - m(q_3 + r)\dot{q}_2^2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

dove in particolare  $I_i = 1 + 0.01\alpha \text{ Kgm}^2$ ,  $m = 1 + 0.01\gamma \text{ Kg}$ ,  $\rho = 1$ ,  $K = 1.5 + 0.01\beta \frac{N}{m}$ ,  $I_e = 1 \text{ Kgm}^2$ , e  $r = 0.1 \text{ m}$  è il raggio del rotore esterno.

Il problema consiste nel controllare attorno ad un punto di equilibrio la posizione  $q_3$  della massa agendo opportunamente sul controllo  $\tau$ . A tal fine si desidera:

- A) Linearizzare il sistema (1) al moto di riferimento a cui corrispondono  $\dot{q}_2 = 1 \text{ rad/sec}$  e  $\dot{q}_3 = 0 \text{ rad/sec}$ . Si fornisca la rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato ottenuto.
- B) Determinare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega le variazioni  $\tilde{\tau}$  dell'ingresso di controllo e le variazioni  $\tilde{q}_3$  della posizione radiale del corpo rispetto alla configurazione di equilibrio ottenuta al punto A). Si discutano le proprietà di stabilità locale dell'equilibrio in anello aperto e si traccino i diagrammi di Bode asintotici della  $G(j\omega)$ .
- C) Progettare un controllore in retroazione per la funzione di trasferimento ricavata al punto B) che soddisfi le seguenti specifiche:
  - C1) Sia tale da garantire un'attenuazione di un fattore  $-35\text{db}$  dei disturbi  $\delta_\tau$  sulla coppia in ingresso al sistema per pulsazioni  $\omega \leq 1 \text{ rad/s}$ .
  - C2) Garantisca errori nulli a regime con tempo di assestamento  $T_{ass} = 0.8 \text{ s}$  e sovralongazione  $S = 20\%$  nel caso si desiderino piccoli scostamenti a gradino dalla posizione di equilibrio del corpo sferico;
  - C3) Sia tale da garantire un'attenuazione di un fattore  $-50\text{db}$  dei disturbi sulla misura di posizione  $q_3$  per pulsazioni  $\omega \geq 2000 \text{ rad/s}$ .

Si commentino i passaggi effettuati durante le fasi di progetto del controllore.

## Soluzione

**A** Scegliendo il vettore di stato

$$x = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3)^T,$$

le matrici della forma di stato del sistema linearizzato attorno all'equilibrio richiesto risultano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{I_i} & \frac{\rho}{I_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{I_e+m(\bar{q}_3+r)^2} & -\frac{\rho}{I_e+m(\bar{q}_3+r)^2} & -\frac{2m(\bar{q}_3+r)v}{I_e+m(\bar{q}_3+r)^2} \\ 0 & 0 & v^2 - \frac{K}{m} & 0 & 2(\bar{q}_3+r)v & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{I_i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = 0,$$

dove  $\bar{q}_3 = \frac{mrv^2}{K-mv^2}$ .

**B** Partendo dalla forma di stato fornita, e sostituendo i valori numerici, si ottiene la funzione di trasferimento in forma di Bode

$$G(s) = \frac{0.427}{s(0.7758s^3 + 1.488s^2 + 0.6441s + 1)}.$$

I poli della f.d.t. risultano

$$p_1 = -1.84 \quad p_{2,3} = -0.036 \pm j0.83 \quad p_4 = 0.$$

I diagrammi di Bode asintotici della f.d.t. si tracciano sommando i contributi asintotici del guadagno  $K_G = 0.427$ , e dei poli che risultano:

- Contributo di  $K_G$ : Il segno positivo del guadagno non da contributo in fase, mentre impone nel diagramma delle ampiezze un guadagno in db pari a  $|K_G|_{db} \approx -7.4$ ;
- Contributo di  $p_1$ : Il contributo in fase centrato nella pulsazione  $\omega = 1.84$  risulta di  $-\pi/4$  su ottava, mentre l'ampiezza decresce di  $-20db/dec$  partendo dalla pulsazione 1.84;
- Contributo di  $p_{2,3}$ : Il contributo della fase risulta approssimativamente di  $-\pi/2$  su ottava, mentre l'ampiezza decresce di  $-40db/dec$  a partire dalla pulsazione 0.83;
- Contributo di  $p_4$ : Trattandosi di un polo nell'origine,  $p_4$  contribuisce in fase con angolo pari a  $-\pi/2$  ed in ampiezza con una pendenza di  $-20db/dec$ .

I diagrammi di Bode asintotici e reali sono riportati in fig. 2.

**C1-C2)** Al fine di garantire le specifiche richieste per il sistema  $G(s)$  stabile in anello aperto, conveniente considerare il progetto di un controllore del tipo  $C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s)$  con  $C_0(s) = 1$ .

La specifica di errore nullo a regime nel caso di spostamenti a gradino della posizione del corpo sferico richiede la presenza di un polo nell'origine nella f.d.t.  $C(s)G(s)$  della catena di azione. Peraltro, la f.d.t.  $G(s)$  del sistema già contiene un polo nell'origine, soddisfacendo così la specifica richiesta ed imponendo  $t = 0$  nella f.d.t.  $C(s)$  del controllore. Per il calcolo del guadagno  $K_c$  del controllore si può sfruttare la specifica C1 che impone un guadagno, per la funzione di trasferimento della catena di azione, maggiore di  $57 = 35db$  per pulsazioni inferiori a  $1rad/sec$ . Si sceglie quindi un controllore della forma  $C_1(s) = 57$  (si veda fig. 3).

Passando alle specifiche dinamiche, ricordiamo che la sovralongazione richiesta risulta  $S = 20\%$  con tempo di assestamento  $T_{ass} = 0.8s$ . Il valore della sovralongazione massima suggerisce valida una approssimazione del secondo ordine per la f.d.t.  $C(s)G(s)$ . In tal modo si ottengono, per garantire le specifiche, margine di fase  $M_f \geq 46^\circ$  e pulsazione di taglio  $\omega_T \geq 8.23 rad/sec$ . Come si nota in fig. 3 il sistema risulta instabile in retroazione a causa del margine di fase negativo. Per rendere positivo il margine di fase e garantire l'approssimazione del secondo ordine si possono utilizzare due reti anticipatrici (quindi con pulsazione dello zero inferiore alla pulsazione del polo) in cascata, ad esempio che conducano ad una forma del controllore del tipo

$$C_2(s) = 57 \frac{(1 + 4.1s)(1 + 0.64s)}{(1 + 0.00049s)(1 + 0.00059s)}.$$

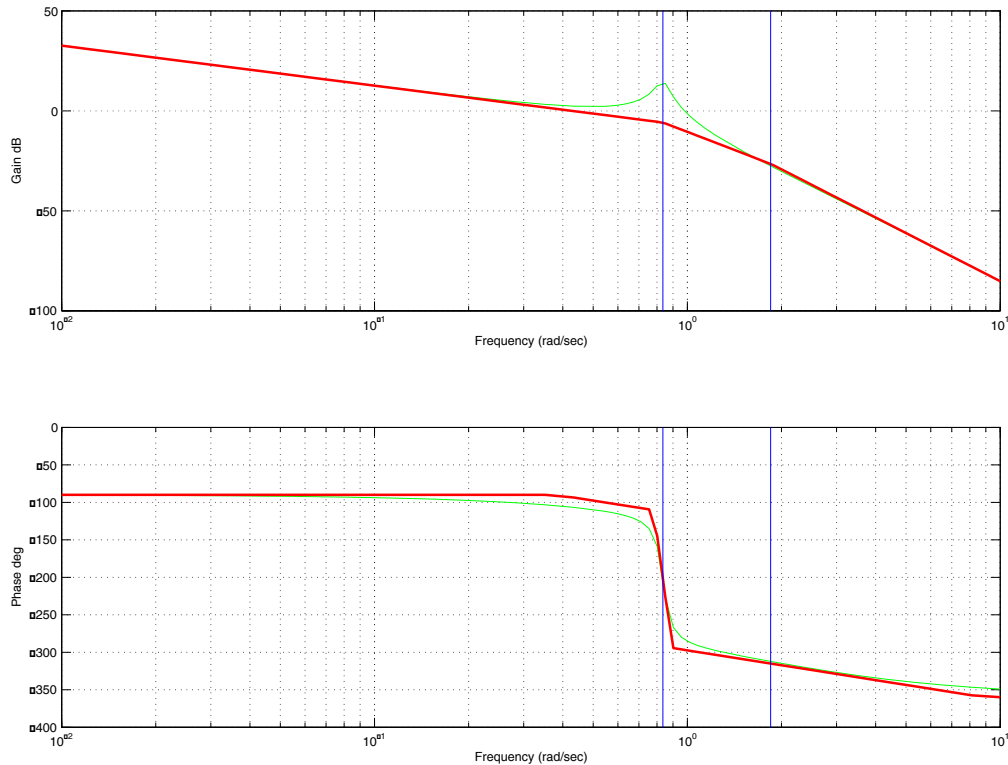


Figure 2: Diagrammi di Bode asintotici e reali della funzione di trasferimento  $G(s)$  in anello aperto.

Come si nota dalla fig. 4, il sistema risulta stabile in anello chiuso, con specifica sulla pulsazione di taglio soddisfatta. La specifica sul margine di fase risulta comunque non soddisfatta. Al fine di soddisfarla (innalzare quindi il margine di fase) si utilizza ancora una rete anticipatrice in cascata alle precedenti, ottenendo una forma del controllore del tipo

$$C_3(s) = 57 \frac{(1 + 4.1s)(1 + 0.64s)(1 + 0.7s)}{(1 + 0.00049s)(1 + 0.00059s)(1 + 0.00059s)}.$$

Come si nota in fig. 5, la specifica sul margine di fase e sulla pulsazione di taglio risultano soddisfatte.

- C3)** La specifica impone l'attenuazione di un fattore  $-50\text{db}$  per pulsazioni maggiori di  $2000\text{rad/sec}$ . Tale specifica, non soddisfatta in precedenza, risulta soddisfatta ad esempio spostando il polo  $s = 1.7 \cdot 10^3$  dell'ultima rete correttiva immessa nel controllore verso le basse frequenze. Una possibile scelta risulta posizionarlo in  $s = -500$ .

Un controllore che soddisfa le specifiche richieste risulta quindi

$$C_4(s) = 57 \frac{(1 + 4.1s)(1 + 0.64s)(1 + 0.7s)}{(1 + 0.00049s)(1 + 0.00059s)(1 + 0.002s)}.$$

In fig. 6 sono riportati i diagrammi relativi al sistema controllato con controllore  $C_4(s)$ , mentre in fig. 7 è riportata la risposta al gradino unitario del sistema.

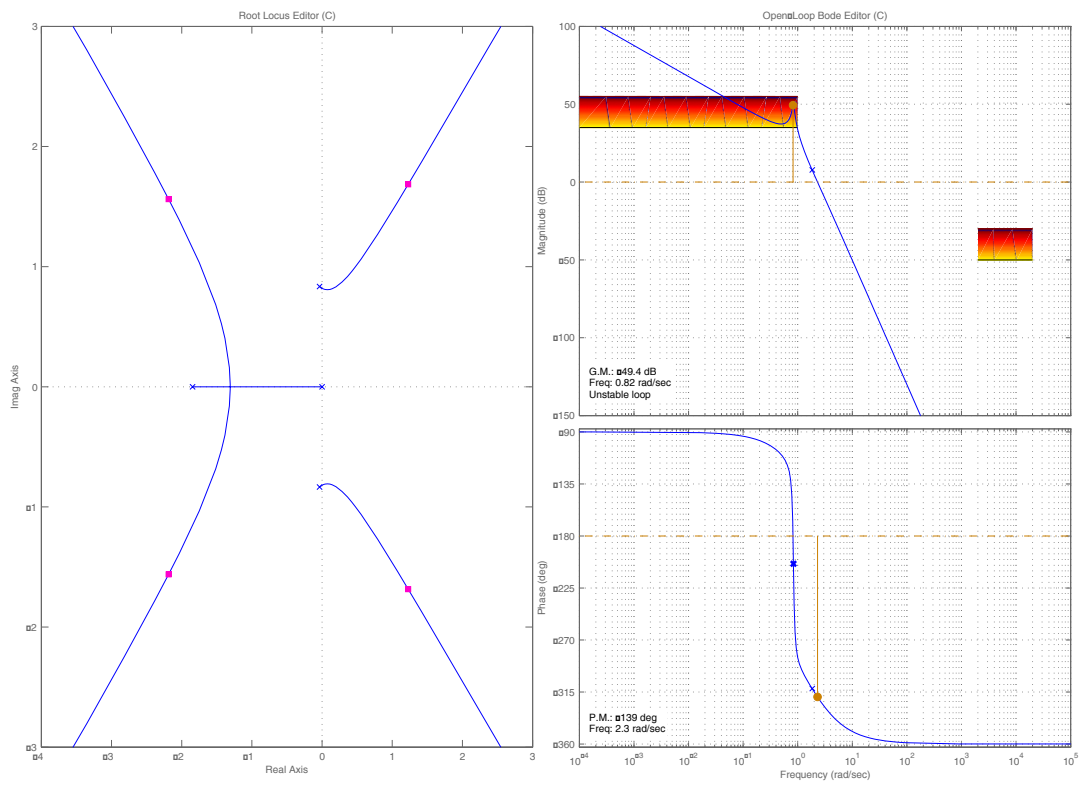


Figure 3: Diagrammi di bode e Luogo delle Radici della  $G(s)$  retroazionata con controllore proporzionale  $C_1(s)$ .

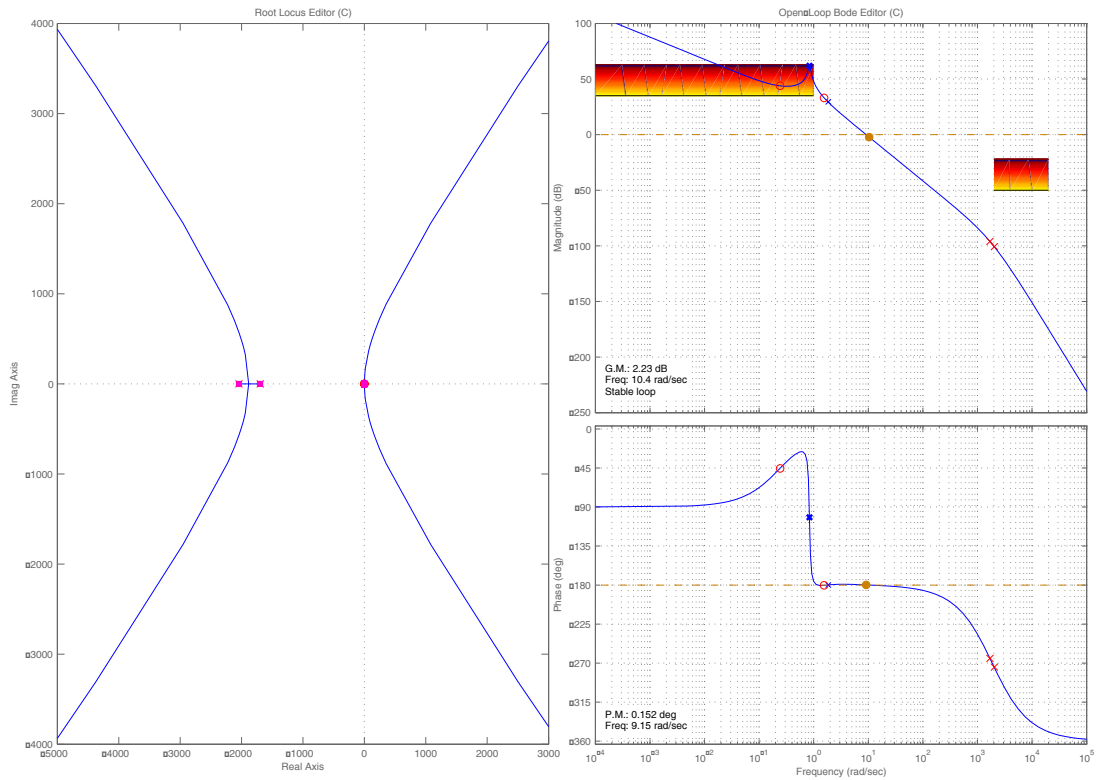


Figure 4: Diagrammi di bode e Luogo delle Radici della  $G(s)$  retroazionata con controllore  $C_2(s)$ .

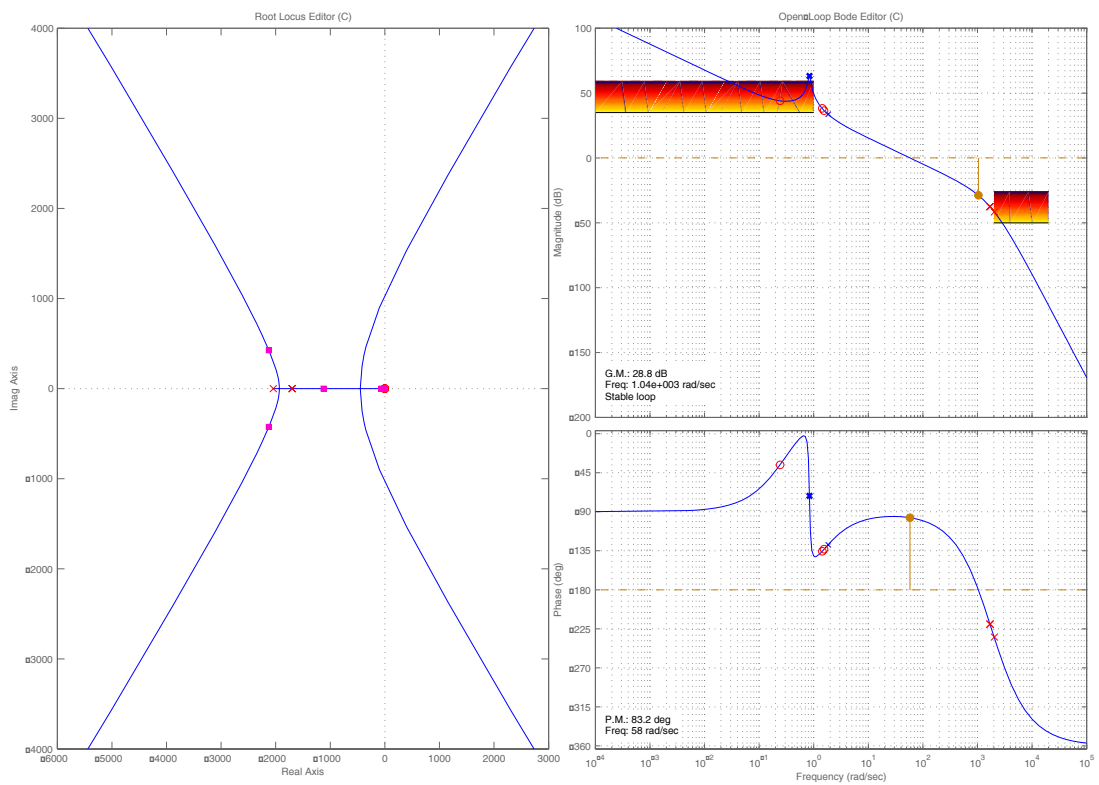


Figure 5: Diagrammi di bode e Luogo delle Radici della  $G(s)$  retroazionata con controllore  $C_3(s)$ .

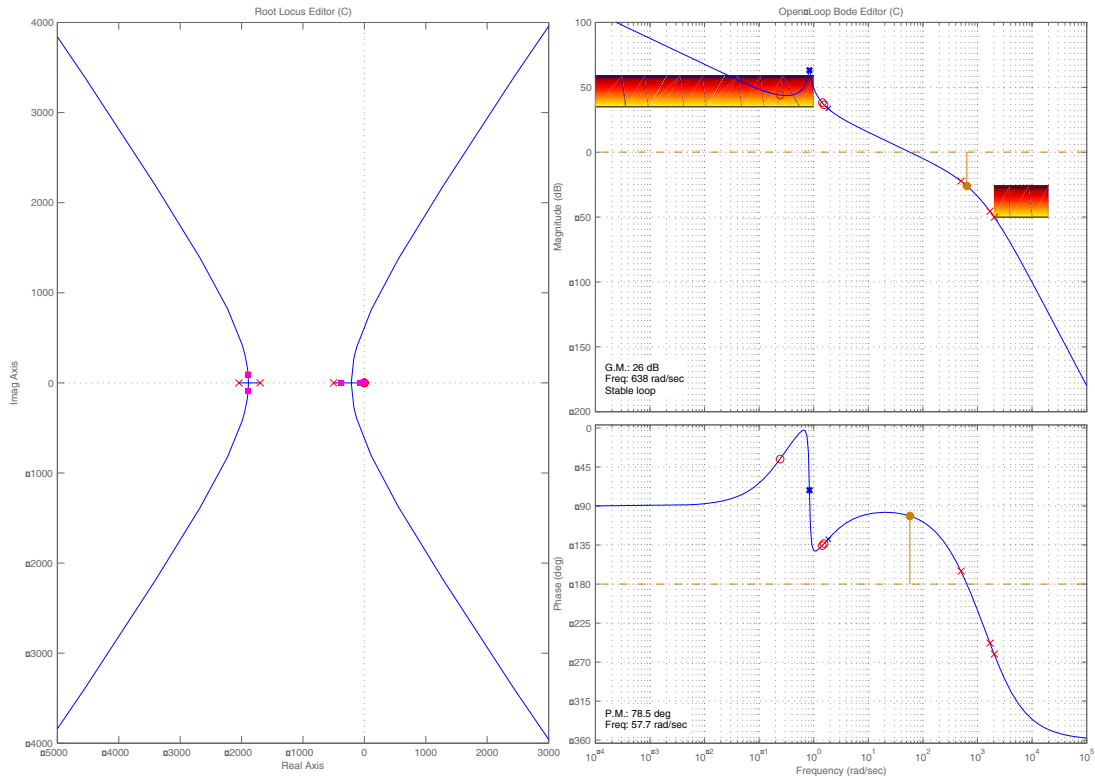


Figure 6: Diagrammi di bode e Luogo delle Radici della  $G(s)$  retroazionata con controllore  $C_4(s)$ .

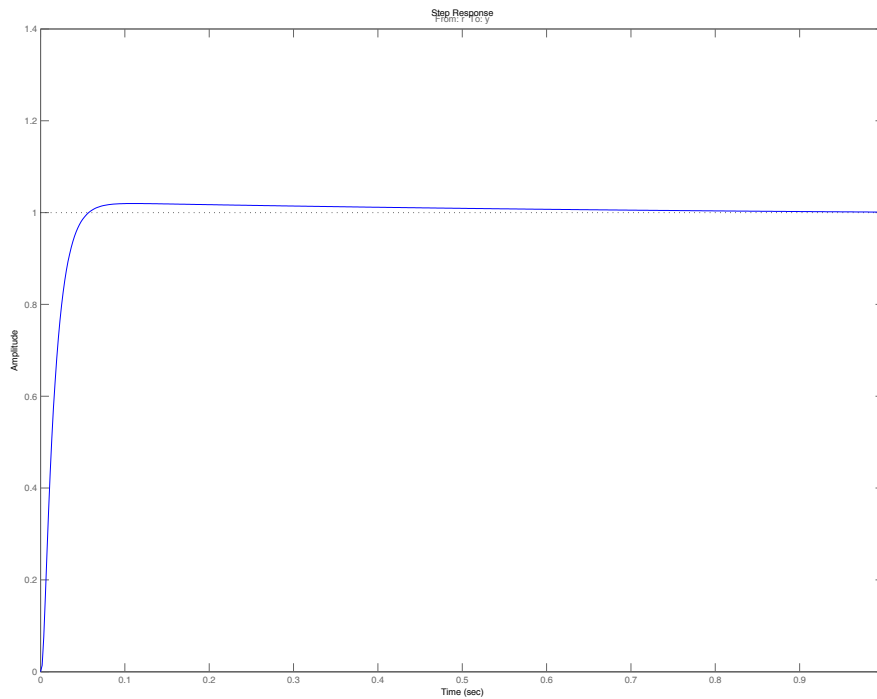


Figure 7: Risposta al gradino della  $G(s)$  retroazionata con controllore  $C_3(s)$ .