Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 16 Settembre 2005

Numero di matricola						
	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	$= 10\delta - 1$

Si consideri il modello monotraccia di autoveicolo con pneumatici rilassati riportato in fig. 1. Si indichino con u e v le componenti longitudinale e laterale della velocità del baricentro e con r la velocità di rotazione (o di 'imbardata') del veicolo. Il veicolo può essere considerato, in prima approssimazione, dotato di moto piano.

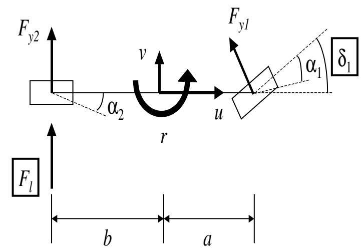

Figure 1: Modello monotraccia di autoveicolo

Nel caso in cui sul veicolo agisca una forza esterna laterale F_l, dovuta al vento e applicata in corrispondenza dell'assale posteriore, il modello può essere descritto in base alle seguenti equazioni

$$\begin{cases} m(\dot{v} + ur) & = & F_{y_1} + F_{y_2} + F_l, \\ J\dot{r} & = & F_{y_1}a - F_{y_2}b - F_l b, \end{cases}$$

con pneumatici rilassati descritti dalle equazioni

$$\frac{d}{u}\dot{F}_{y_1} + F_{y_1} = C_1\alpha_1, \qquad \frac{d}{u}\dot{F}_{y_2} + F_{y_2} = C_2\alpha_2,$$

ed angoli di deriva α_1 e α_2 legati all'angolo di sterzo anteriore δ_1 in base alle relazioni lineari

$$\alpha_1 = \delta_1 - \frac{v + ra}{u}, \qquad \alpha_2 = -\frac{v - rb}{u}.$$

Sia $m = 1200 + \frac{\alpha}{10}$ kg la massa del veicolo, $J = 1680 + \frac{\beta}{10}$ kgm^2 il suo momento di inerzia rispetto al baricentro, $a = 1.2$ m e $b = 1.4$ m i semipassi anteriore e posteriore, $C_1 = C_2 = 100000 + \frac{\gamma}{10}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{rad}}$ le rigidezze di deriva dell'assale anteriore e dell'assale posteriore, $d = 0.25$ m la lunghezza di rilassamento dei pneumatici. La velocità longitudinale u è supposta costante e pari a $20 + \frac{\delta}{10}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Il veicolo è dotato di un sistema di guida automatica che, agendo sull'angolo di sterzo anteriore δ_1, permette l'inseguimento di riferimenti di velocità di imbardata r.

A Si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema, considerando come ingressi l'angolo di sterzo anteriore δ_1 e la forza laterale F_l, e come uscita la velocità di imbardata r.

B Si determinino le funzioni di trasferimento che legano l'uscita r ai due ingressi δ_1 e F_l rispettivamente.

C Si descriva l'effetto a regime sulla velocità di imbardata r di un angolo di sterzo sinusoidale $\delta_1(t) = \bar{\delta}_1 \sin t$, quando la forza laterale dovuta al vento sia costante e pari a $F_l = \bar{F}_l$.

D Si consideri il progetto di un controllore in retroazione che utilizzi la misura della velocità di imbardata r e il controllo dell'angolo di sterzo anteriore δ_1 in modo da soddisfare le specifiche riportate nel seguito. Si descriva nel dettaglio la procedura di progetto, commentando i passaggi effettuati; si riportino i diagrammi di Bode utilizzati e l'espressione analitica del controllore ricavato.

- D1 Se la forza laterale dovuta al vento F_l è nulla, il controllore deve garantire, a regime, errori nulli nell'inseguimento di riferimenti di velocità di imbardata a gradino e a rampa.
- D2 Sempre considerando $F_l(t) = 0$, il tempo di assestamento T_a deve essere minore o uguale a 3 secondi e la massima sovraelongazione minore o uguale al 30%.
- D3 Sempre considerando $F_l(t) = 0$, deve essere garantita un'attenuazione di un fattore 10^5 delle componenti del rumore di misura sulla velocità di imbardata r con frequenze pari o superiori a 100 Hz.
- D4 Nel caso in cui sul veicolo agisca una forza laterale F_l sinusoidale con frequenza pari o inferiore a 0.05 Hz, il controllore deve garantire l'attenuazione di un fattore 10^5 delle componenti in uscita dovute a questo disturbo.

Soluzione

A Sostituendo le espressioni degli angoli di deriva α_1 e α_2 nelle equazioni differenziali che descrivono il comportamento dei pneumatici, si ottiene la rappresentazione in forma di stato del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu,\\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

con $x = [\ v\ r\ F_{y_1}\ F_{y_2}\ ]^T$, $u = [\ \delta_1\ F_l\ ]^T$ e $y = r$. Le matrici A, B, C, D risultano:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & -u & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{a}{J} & -\frac{b}{J} \\ -\frac{C_1}{d} & -\frac{C_1 a}{d} & -\frac{u}{d} & 0 \\ -\frac{C_2}{d} & \frac{C_2 b}{d} & 0 & -\frac{u}{d} \end{bmatrix},\\
B &= \begin{bmatrix} B_\delta & | & B_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & -\frac{b}{J} \\ \frac{C_1 u}{d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

B L-trasformando le equazioni del moto, si ottengono le seguenti funzioni di trasferimento tra l'uscita r e i due ingressi δ_1 e F_l:

$$\begin{aligned}
G_\delta(s) &= \frac{madC_1us^2 + maC_1u^2s + C_1C_2u(a+b)}{p_4s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0},\\
G_F(s) &= -\frac{(ds+u)\left[mbds^2 + mbus + C_1(a+b)\right]}{p_4s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0},
\end{aligned}$$

dove i coefficienti del polinomio a denominatore delle due f.d.t. valgono

$$\begin{aligned}
p_4 &= Jmd^2,\\
p_3 &= 2dJmu,\\
p_2 &= dJ(C_1 + C_2) + md(C_1a^2 + C_2b^2) + Jmu^2,\\
p_1 &= Ju(C_1 + C_2) + mu(C_1a^2 + C_2b^2) + dmu(C_2b - C_1a),\\
p_0 &= C_1C_2(a+b)^2 + mu^2(C_2b - C_1a).
\end{aligned}$$

Nel caso $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, sostituendo i valori numerici ai vari parametri si ottiene:

$$\begin{aligned}
G_\delta(s) &= \frac{5714s^2 + 4.571\ 10^5 s + 4.127\ 10^6}{s^4 + 160s^3 + 7876s^2 + 1.19\ 10^5 s + 6.127\ 10^5},\\
G_F(s) &= \frac{-0.0008333s^3 - 0.1333s^2 - 5.849s - 41.27}{s^4 + 160s^3 + 7876s^2 + 1.19\ 10^5 s + 6.127\ 10^5}.
\end{aligned}$$

I poli delle due f.d.t. sono in $-69.5040 \pm 0.7159i$ e $-10.4960 \pm 4.0807i$: G_δ e G_F sono quindi asintoticamente stabili in anello aperto. I relativi diagrammi di Bode vengono riportati in fig. 2 e 3.

C Per determinare l'effetto combinato che, a regime, hanno un angolo di sterzo δ_1 sinusoidale e una forza laterale F_l costante, agenti contemporaneamente, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, valido in campo lineare. In base a questo principio, è possibile calcolare l'effetto che a regime avrebbero i due ingressi se agissero uno alla volta, e sommare semplicemente i due effetti così ottenuti. Per determinare la risposta a regime corrispondente ad un ingresso $\delta_1(t) = \bar{\delta}_1 \sin(t)$ è sufficiente applicare il teorema della risposta armonica alla f.d.t. asintoticamente stabile $G_\delta(s)$.

L'espressione risultante, considerando il fattore di amplificazione $\bar{\delta}_1$ e la pulsazione $\bar{\omega} = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ è quindi:

$$y_{\mathrm{r}}(t) = \bar{\delta}_1 |G_\delta(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \arg(G_\delta(j\bar{\omega}))) = 6.7271\bar{\delta}_1 \sin(t - 0.0836).$$

Per determinare, invece, l'effetto a regime che una forza laterale F_l a gradino di ampiezza $\bar{F}_l$ causa sull'uscita, considerando identicamente nullo l'angolo di sterzo anteriore δ_1, basta applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG_F(s)\frac{\bar{F}_l}{s} = \lim_{s\to 0} G_F(s)\bar{F}_l = -\bar{F}_l u C_1(a+b)/p_0 = -\bar{F}_l 6.7358\ 10^{-5}.$$

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, nel caso in cui i due ingressi agiscano contemporaneamente la risposta del sistema a regime è la somma delle due risposte precedentemente calcolate.

D Lo schema di controllo da realizzare è riportato in fig. 4. Poiché il sistema da controllare $G_\delta(s)$ è asintoticamente stabile in anello aperto, è possibile procedere al progetto del controllore direttamente in base ai diagrammi di Bode della f.d.t. di anello $C(s)G_\delta(s)$. Si faccia quindi riferimento ad un controllore del tipo $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$.

- D1) La funzione di trasferimento $G_\delta(s)$ non ha poli nell'origine. Quindi per avere, a regime, errore nullo nell'inseguimento di riferimenti a gradino ed a rampa, è necessario che il controllore abbia due poli nell'origine. Il tipo t del controllore risulta quindi $t = 2$. I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_\delta(s)$, con $C(s) = \frac{1}{s^2}$, vengono riportati in fig. 5.

- D2) Poiché la massima sovraelongazione ammissibile nella risposta al gradino è del 30%, è possibile approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del secondo ordine, ed utilizzare quindi un'approssimazione a due poli dominanti. Per un sistema del secondo ordine, la relazione che lega la sovraelongazione allo smorzamento dei poli è $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$. Nota la massima sovraelongazione ammissibile, è possibile ricavare lo smorzamento minimo $\bar{\delta}$; nel caso specifico, si trova $\bar{\delta} = 0.3579$. Il minimo margine di fase ammissibile vale quindi $\bar{M}_f \simeq 36$ gradi. Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento, è necessario a questo punto utilizzare la relazione $\omega_T \geq \frac{3}{T_a\bar{\delta}} = 2.79\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Il diagramma dell'ampiezza della funzione di trasferimento $C(s)G_\delta(s)$ deve quindi attraversare l'asse a zero *db* per pulsazioni maggiori di 2.79 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Dai diagrammi di Bode riportati in fig. 5, si deduce che, per soddisfare queste specifiche, è necessario inserire uno o più zeri a bassa frequenza e abbassare il guadagno della f.d.t. di anello $C(s)G_\delta(s)$. Inserendo, ad esempio, uno zero in -0.5 e abbassando il guadagno a 0.7, si ottiene un margine di fase di 46.8 gradi e una pulsazione di taglio di 8.3 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_\delta(s)$ relativi al controllore $C(s) = 0.7\frac{2s+1}{s^2}$ vengono riportati in fig. 6.

- D3) La funzione di trasferimento tra l'uscita y e il rumore di misura ν è:

$$Y(s) = -\frac{C(s)G_\delta(s)}{1 + C(s)G_\delta(s)}\nu(s).$$

  Per soddisfare la specifica di reiezione del disturbo di misura, è necessario soddisfare la relazione:

$$\left|\frac{C(j\omega)G_\delta(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_\delta(j\omega)}\right| < \frac{1}{10^5} = -100db.$$

  Poiché nel campo di frequenze di interesse vale $|C(j\omega)G_\delta(j\omega)| \ll 1$, la relazione da soddisfare risulta, in prima approssimazione:

$$|C(j\omega)G_\delta(j\omega)|_{db} < -100db,$$

  per $\omega > 628\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Questa specifica può essere verificata inserendo un polo in alta frequenza, ad esempio in -100. I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_\delta(s)$, con $C(s) = 0.7\frac{2s+1}{s^2(0.01s+1)}$, vengono riportati in fig. 7.

- D4) La funzione di trasferimento tra l'uscita y e la forza di disturbo F_l è:

$$Y(s) = \frac{G_F(s)}{1 + C(s)G_\delta(s)}F_l(s).$$

Per soddisfare la specifica di reiezione del disturbo F_l, è necessario soddisfare la relazione (per $\omega \leq 0.31 \ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$):

$$\left| \frac{G_F(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_\delta(j\omega)} \right| < \frac{1}{10^5}.$$

Poiché nel campo di frequenze di interesse vale $|C(j\omega)G_\delta(j\omega)| \gg 1$, la relazione da soddisfare risulta, in prima approssimazione:

$$|C(j\omega)G_\delta(j\omega)|_{db} > 100db + |G_F(j\omega)|_{db} = 16.5db.$$

Come si osserva in fig. 7, la specifica risulta già soddisfatta.

In fig. 8 viene riportata la risposta del sistema in anello chiuso al gradino unitario nel caso $F_l = 0$.

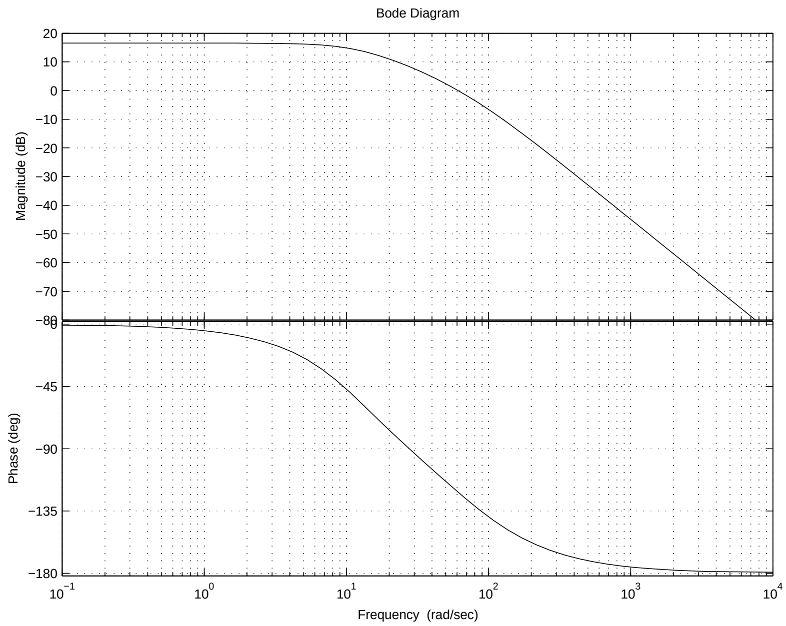

Figure 2: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_\delta(s)$.

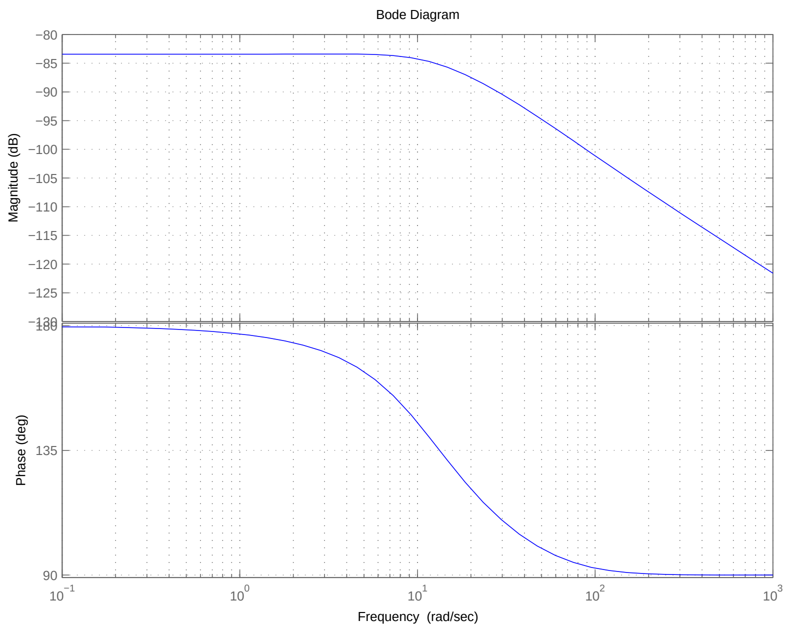

Figure 3: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_F(s)$.

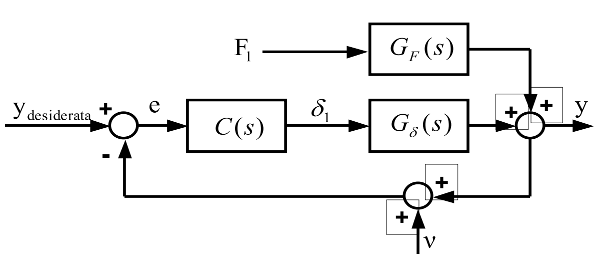

Figure 4: Schema del sistema di controllo da realizzare.

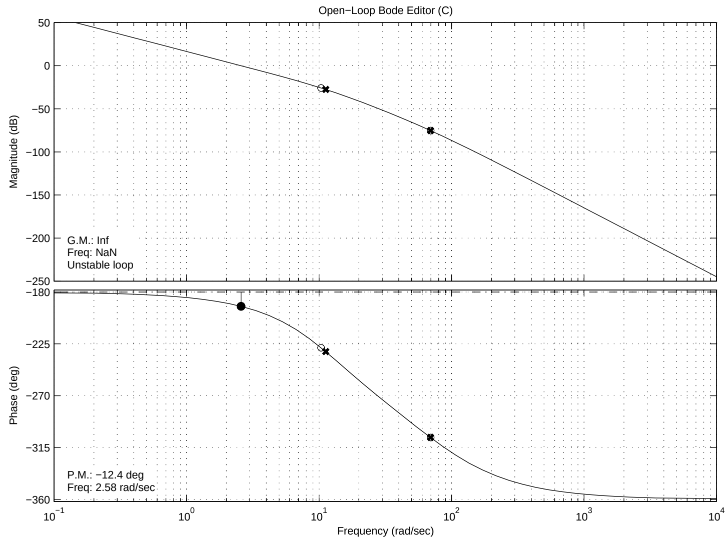

Figure 5: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_\delta(s)$, con $C(s) = \frac{1}{s^2}$.

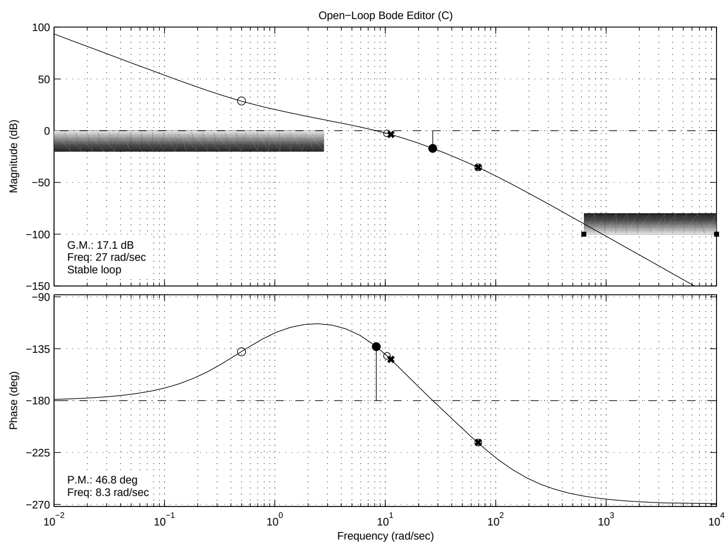

Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_\delta(s)$, con $C(s) = 0.7\frac{2s+1}{s^2}$.

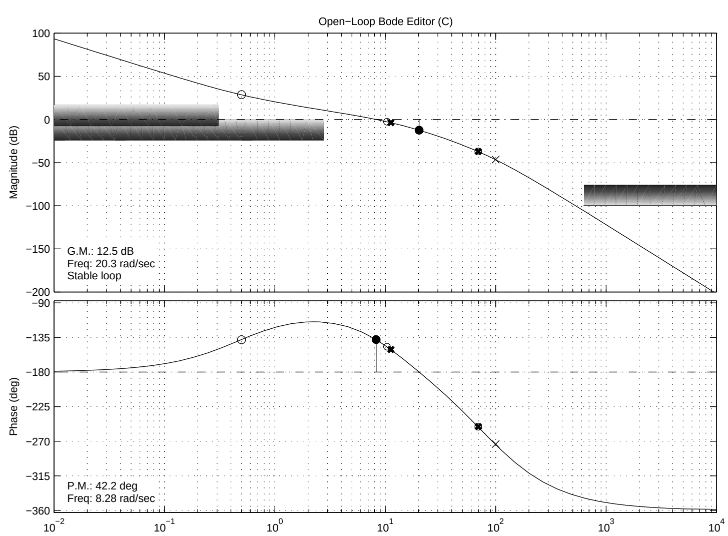

Figure 7: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_\delta(s)$, con $C(s) = 0.7\frac{2s+1}{s^2(0.01s+1)}$.

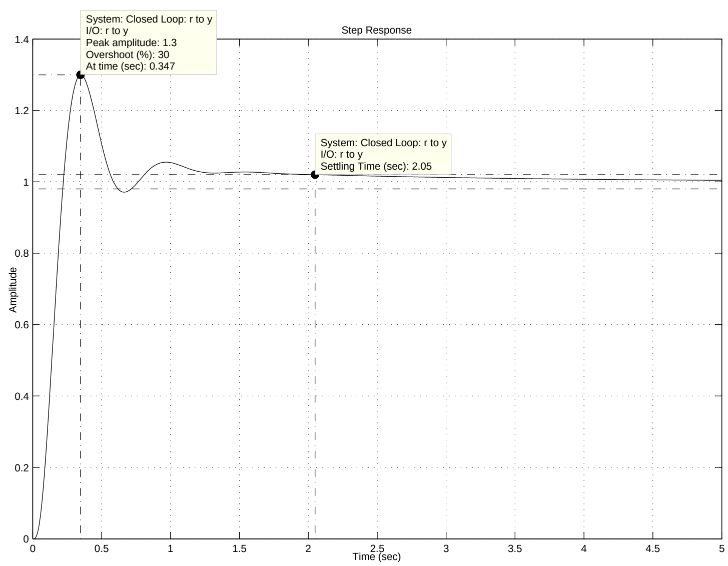

Figure 8: Risposta del sistema in anello chiuso al gradino unitario nel caso $F_l = 0$.