

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	---------------	------------------	---

Si consideri il semplice modello di altoparlante a parametri concentrati (fig. 1). Il sistema di eccitazione, costituito da bobine eccitatrici e un magnete permanente, è alimentato da una tensione $v(t)$. Tale sistema è collegato meccanicamente ad una massa mobile e ad una membrana con proprietà viscoelastiche.

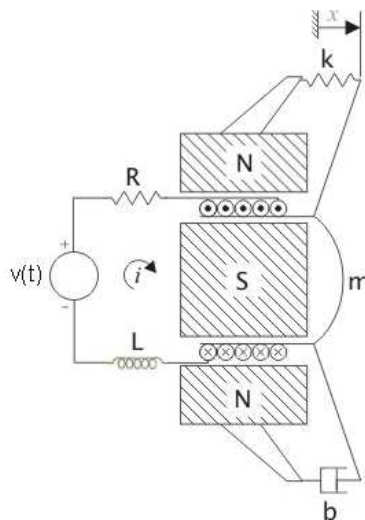


Figure 1: Sistema elettromeccanico da controllare (altoparlante sub-woofer).

Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = q_{ms}i \\ v_i(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + q_{es}\dot{x} \end{cases} \quad (1)$$

dove $m = 0.09$ Kg è la massa mobile, $b = 0.5$ N s/m e $k = 2000 + \beta$ N/m la cedevolezza e l'elasticità della parte mobile, $R = 50 + \alpha\Omega$ e $L = 1 \cdot 10^{-2}$ H la resistenza e l'induttanza della bobina eccitatrice. I parametri $q_{es} = 3$ e $q_{ms} = 500 + \gamma$ sono dei fattori di merito elettrico e meccanico adimensionali.

Per migliorare la qualità sonora del sistema, è possibile regolare opportunamente un segnale in retroazione che utilizza la misura della posizione dell'escursione meccanica $x(t)$ della massa mobile. Questa misura si suppone fornita da un trasduttore di misura con una funzione di trasferimento assegnata e pari a $T(s) = 1/(0.2 \cdot 10^{-5}s + 1)$.

Il sistema è progettato per lavorare nel range di posizioni $0.75 \text{ mm} \leq x \leq 1.25 \text{ mm}$, dove $x = 0$ corrisponde alla posizione di riposo con ingresso (di tensione) nullo. Si desidera:

- Portare il sistema in forma di stato e ricavare in forma simbolica la funzione di trasferimento fra la tensione $v(t)$ e l'escursione $x(t)$;
- Calcolare i modi e discutere la stabilità del sistema. Tracciare manualmente i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase e i diagrammi di Nyquist della funzione di trasferimento richiesta;
- Utilizzando il trasduttore di misura con caratteristica $T(s)$, si progetti un controllore tale che il riferimento di posizione $x = 1$ mm sia raggiunto con errore a regime inferiore all'1%, senza eccedere il range di escursione massima, e portandosi a valori di $\pm 5\%$ dal valore di regime entro un tempo non superiore a 0.005 s;
- Supponendo che la misura di $x(t)$ sia affetta da rumore con componenti armoniche trascurabili per frequenze inferiori a 80 KHz, si cerchi di attenuare l'effetto sulla uscita delle componenti a più alta frequenza di tali disturbi di un fattore pari a 10^2 .
- La funzione di trasferimento in anello chiuso tra il segnale di riferimento e l'uscita, nel range di frequenze inferiori a 3 KHz, introduca sfasamenti non superiori a $\pm 5^\circ$.

Soluzione

- A) Essendo il sistema lineare, considerando come ingresso $u(t) = v(t)$ e scegliendo come vettore stato $z = (z_1, z_2, z_3)^T = (x, \dot{x}, i)^T$ risulta:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{b}{m}z_2 + \frac{q_{ms}}{m}z_3 \\ \dot{z}_3 = -\frac{q_{es}}{L}z_2 - \frac{R}{L}z_3 + u(t) \end{cases}$$

Esprimendo il sistema in forma matriciale si ha:

$$\begin{cases} \dot{X} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{q_{ms}}{m} \\ 0 & -\frac{q_{es}}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u \\ y \stackrel{def}{=} Cx + Du = (1 \ 0 \ 0) x \end{cases}$$

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato in anello aperto considerando come ingresso la tensione $v(t)$ e come uscita $x(t)$ risulta:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{q_{ms}}{[s^3mL + s^2(mR + bL) + s(bR + q_{ms}q_{es} + kL) + kR]}.$$

Alternativamente la stessa fdt può essere ricavata L-trasformando e risolvendo il sistema lineare.

Ponendo ad esempio nulli i parametri α, β, γ , si ottiene numericamente:

$$G(s) = \frac{5.556 \cdot 10^5}{s^3 + 5006s^2 + 1.717 \cdot 10^6s + 1.111 \cdot 10^8}$$

- B) Calcolando i poli della f.d.t. $G(s)$ si osserva che essi sono tutti a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile. I modi del sistema risultano $e^{\lambda_i t}$, con

$$\lambda_1 = -4641$$

$$\lambda_2 = -278.9$$

$$\lambda_3 = -85.84.$$

I diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase sono riportati in fig. 2 e i diagrammi di Nyquist sono riportati in fig. 3.

- C) Consideriamo ora il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Ci si riferisce ad un sistema a blocchi in retroazione negativa come riportato in fig.4.

Essendo l'impianto ad anello aperto asintoticamente stabile, per progettare il controllore è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode. Tenendo conto del trasduttore di misura risulta che

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + T(s)C(s)G(s)}$$

e si ha

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + T(s)C(s)G(s)}.$$

Utilizzando il teorema del valore finale (in ipotesi di stabilità dell'anello chiuso) si impone che valga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + T(s)C(s)G(s)} \frac{1 \cdot 10^{-3}}{s} \leq 0.01 \cdot 10^{-3}$$

e, scegliendo un controllore di tipo 0 con guadagno statico K_c si ottiene

$$\frac{1 \cdot 10^{-3}}{1 + K_c T(0)G(0)} \leq 0.01 \cdot 10^{-3}$$

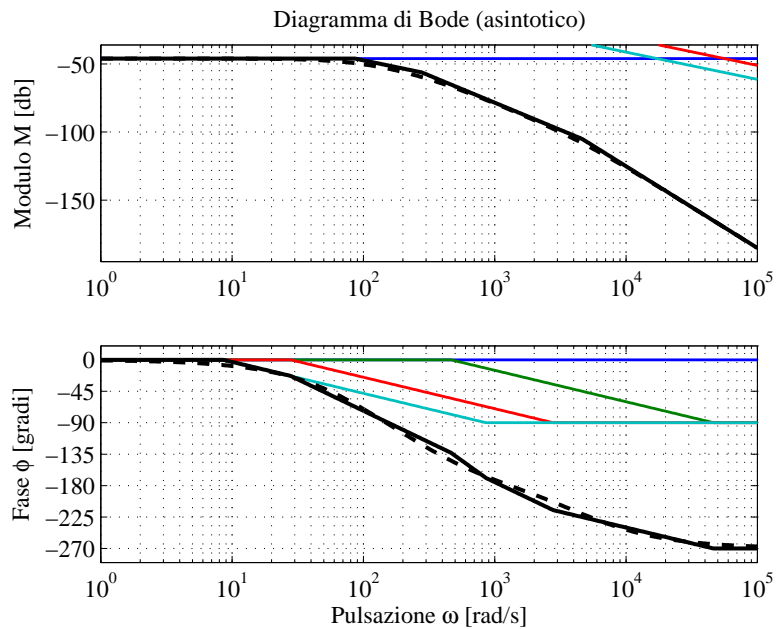


Figure 2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase asintotici e reali della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolata al punto **B**).

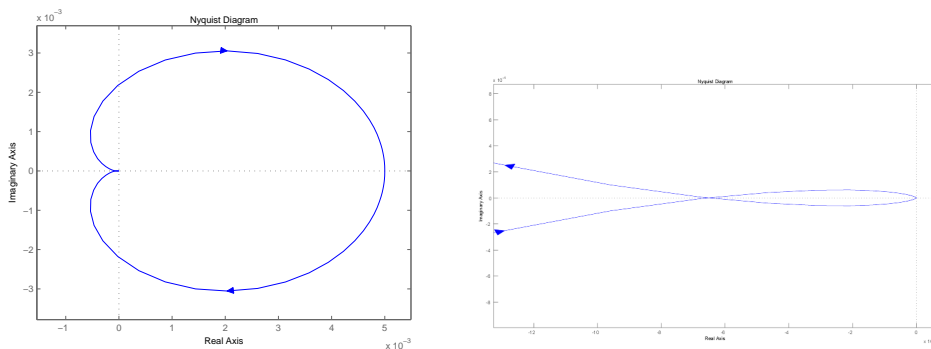


Figure 3: Diagrammi di Nyquist per la funzione di trasferimento calcolata al punto **B**): **andamento complessivo (sinistra) e zoom nell'origine (a destra)**.

da cui, essendo $T(0) = 1$,

$$K_c \geq \frac{99}{G(0)} = \frac{1}{10 \cdot 0.005} = 19800.$$

Fissando ad esempio $K_c = 20000$ si garantisce la specifica richiesta, e si ottiene il diagramma di Bode riportato in fig. 5.

La specifica sulla posizione della massa mobile da raggiungere evitando la rottura in un tempo fissato si traduce in una specifica sulla sovralongazione e sul tempo di assestamento. In particolare risulta che:

$$S = \frac{|x_{max} - x_r|}{|x_r|} = \frac{1.25 - 1}{1} = 25\%.$$

Ciò ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti non inferiore a 0.4037 (come si ricava dalla espressione della sovralongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Questo significa chiedere un margine di fase $\phi_M \geq 40^\circ$.

La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 1500 \text{ rad/sec}$. Questa specifica in particolare si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ in-

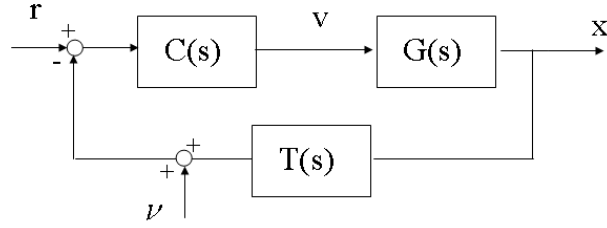


Figure 4: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema comprensivo di trasduttore di misura $T(s)$ posto nella catena di retroazione.

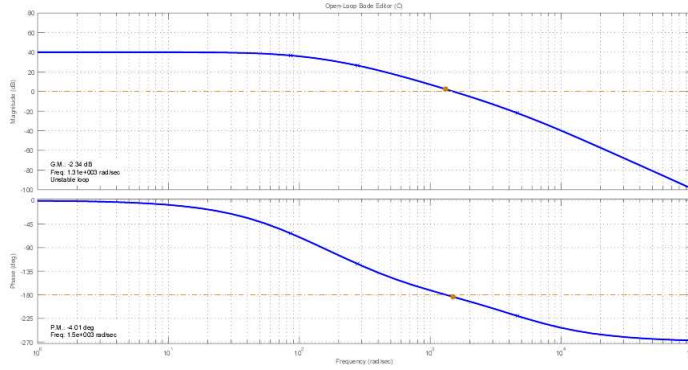


Figure 5: Diagrammi di Bode ottenuti con un controllore puramente proporzionale con $K_c = 20000$.

tersechi l'asse a 0db a pulsazioni superiori a 1500rad/sec . Tale condizione non è rispettata avendo attualmente una pulsazione di taglio di 0.005rad/sec (fig.5).

Per aumentare la pulsazione di taglio si potrebbe agire aumentando il guadagno del controllore, ottenendo tuttavia al contempo una ulteriore riduzione del margine di fase che porterebbe il sistema all'instabilità. Risulta allora conveniente utilizzare un'azione anticipatrice. Ponendo ad esempio uno zero reale in -331 , mantenendo lo stesso guadagno 20000 , si ottengono i diagrammi di Bode riportati fig. 6. In tal caso si hanno un margine di fase di 43° e una pulsazione di taglio di circa 4950rad/sec e quindi entrambe le specifiche risultano rispettate.

- D) Per imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza bisogna considerare la f.d.t. $\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)T(s)}$, e imporre in particolare $|C(s)G(s)| < 10^{-2}|1 + T(s)C(s)G(s)|$ nelle pulsazioni di interesse. Poichè $|T(j\omega)| \leq 2 \cdot 10^{-6}$, la specifica è ottenuta con $|C(j\omega)G(j\omega)|_{\text{db}} \leq -40\text{db}, \forall \omega > 2\pi \cdot 80000 \approx 5.0265 \cdot 10^6\text{rad/s}$.

Come si vede questa specifica è già rispettata. Volendo a questo punto definire il controllore, per la causalità del sistema, è conveniente inserire nel compensatore un polo ad alta frequenza, ad es. in $-3.5e + 006$, ottenendo il diagramma di Bode riportato in fig.7.

Il controllore risultante sino a questo punto è dato da

$$C(s) = 20000 \frac{(1 + 0.0012s)}{(1 + 2.9 \cdot 10^{-7}s)}. \quad (2)$$

- E) Per quanto riguarda l'ultimo punto, è necessario considerare la funzione di trasferimento ad anello chiuso il riferimento e l'uscita

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + T(s)C(s)G(s)} R(s).$$

Dal diagramma di Bode di tale fdt (fig. 8) si può osservare che la specifica non è attualmente rispettata essendo il segnale fortemente distorto nelle pulsazioni di interesse $\omega \leq 2\pi 3000 = 18850\text{rad/s}$: in particolare, alla pulsazione di 18850rad/s si ha uno sfasamento di -164° . Per ridurre lo sfasamento della f.d.t in anello chiuso, si deve ulteriormente aumentare il guadagno dell'anello aperto nella regione di interesse. Per ottenere questo scopo, senza violare le precedenti specifiche, si può

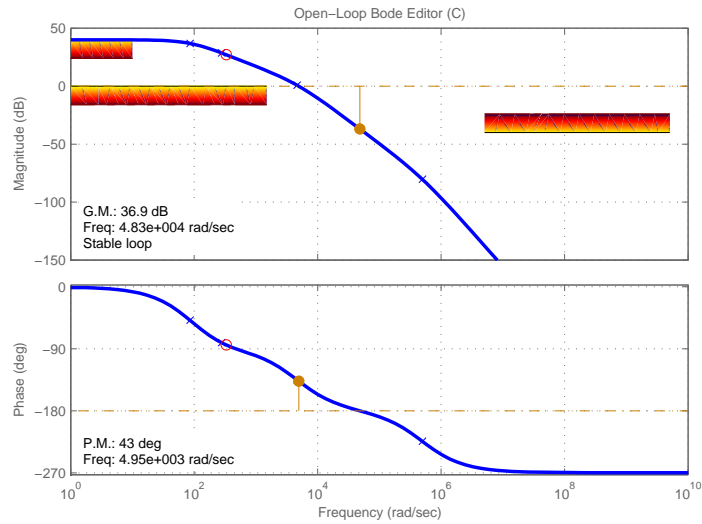


Figure 6: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = 20000(1 + 0.003s)$

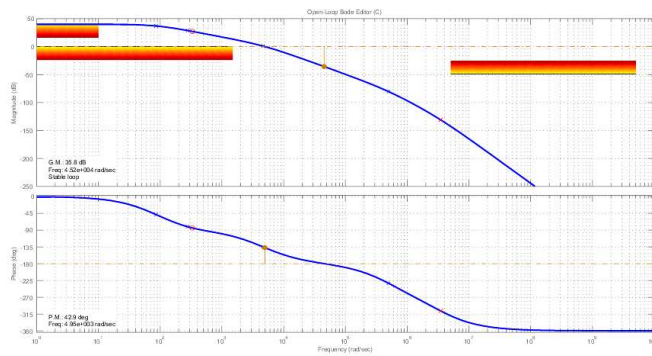


Figure 7: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

utilizzare un'ulteriore azione anticipatrice, ponendo uno zero aggiuntivo in -80.9 e un ulteriore polo in $-3.5 \cdot 10^6$. In questo modo si garantisce la specifica richiesta in fig. 9 (per pulsazione di 18850 rad/s si ha uno sfasamento di -0.261°). Il controllore finale è il seguente:

$$C(s) = 20000 \cdot 10^{12} \frac{(1 + 0.003s)(1 + 0.012s)}{(1 + 2.9 \cdot 10^{-7}s)^2}. \quad (3)$$

A verifica finale del progetto del controllore, viene riportata la risposta al gradino del sistema in anello chiuso in fig. 11.

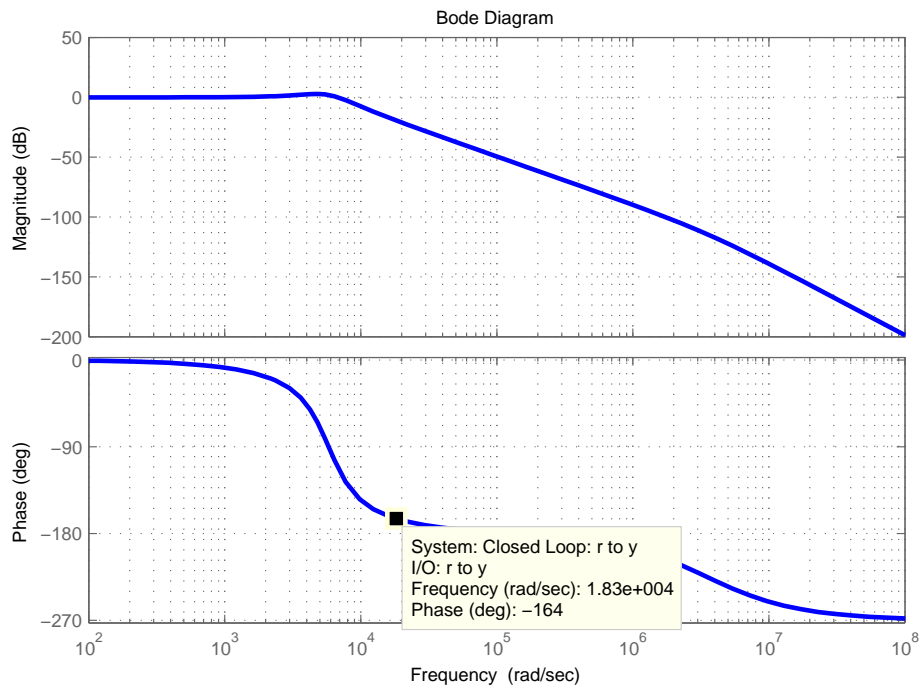


Figure 8: Diagrammi di Bode della fdt ad anello chiuso con il controllore (??).

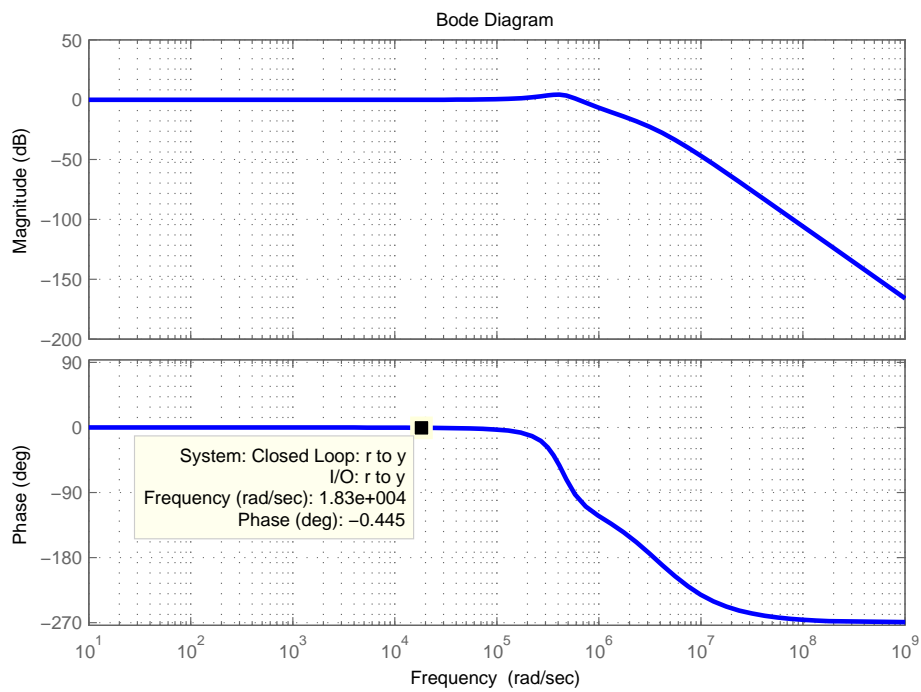


Figure 9: Diagrammi di Bode della fdt ad anello chiuso aggiungendo un'ulteriore azione anticipatrice (controllore (3), che mostrano il soddisfacimento della specifica E.

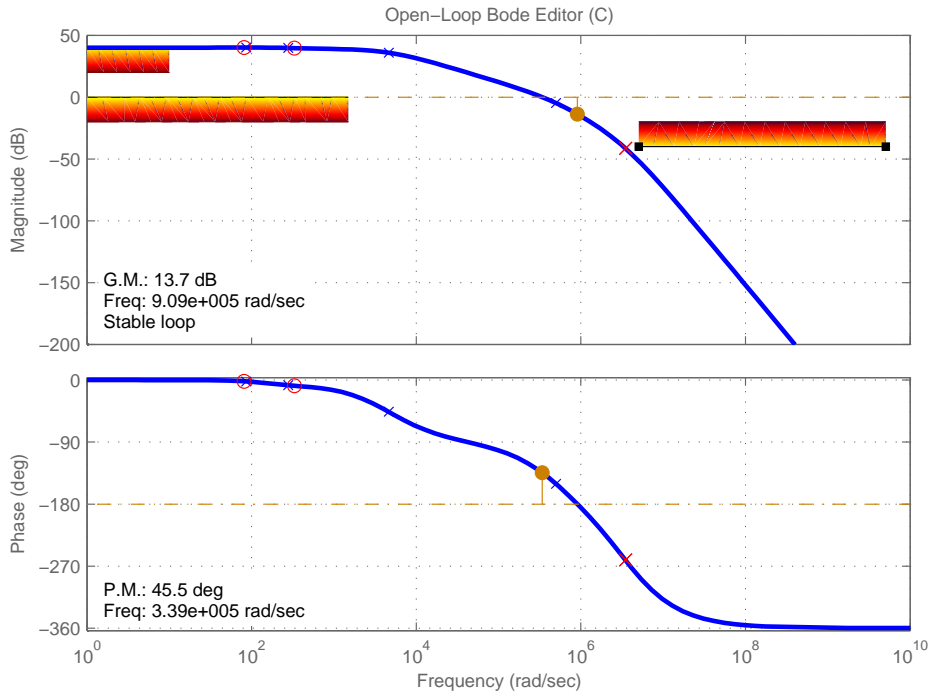


Figure 10: Diagrammi di Bode della fdt ad anello aperto col controllore (3: le specifiche C) e D) rimangono verificate.

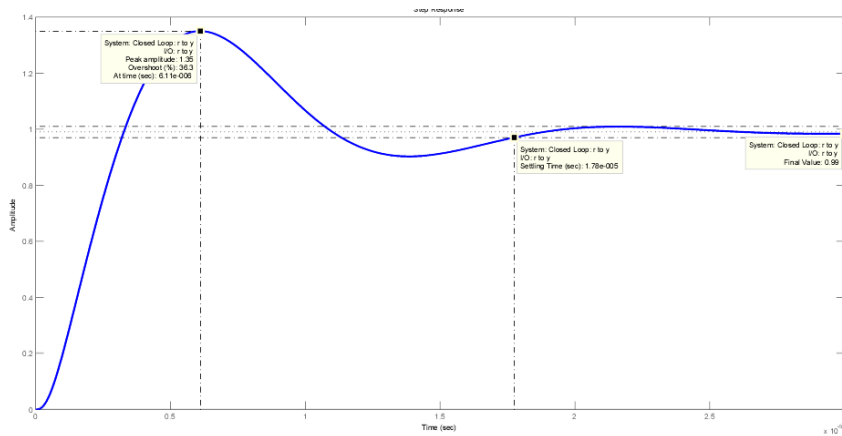


Figure 11: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione.