

Si consideri il modello di uno scambiatore a pannello solare dato in figura 1. Si indichi con w la portata

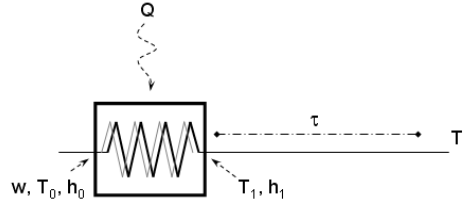


Figure 1: Scambiatore di calore a pannello solare.

del circuito, con h_0, T_0 ed h_1, T_1 , rispettivamente, l'entalpia e la temperatura del fluido in ingresso ed in uscita dallo scambiatore e con Q la potenza termica assorbita dal fluido. Dal bilancio delle potenze si ottiene

$$\frac{dE}{dt} = w(h_0 - h_1) + Q,$$

dove con E si è indicata l'energia totale del fluido. Nell'ipotesi di fluido monofase ed incomprimibile, è possibile semplificare il modello ammettendo che $h \approx cT$, dove c è il calore specifico del fluido. Supponendo inoltre che la zona di scambio sia corta e che vi sia una buona miscelazione, è possibile introdurre una approssimazione semplificatrice per la quale $E \approx mcT_1$, dove m rappresenta la massa totale di fluido nello scambiatore. Il modello matematico semplificato sarà quindi

$$mc \frac{dT_1}{dt} = wc(T_0 - T_1) + Q.$$

- A** Si determini il valore di regime \bar{T}_1 della temperatura del fluido in uscita dallo scambiatore nell'ipotesi in cui la portata w , la potenza termica Q e la temperatura del fluido in ingresso T_0 siano al valore nominale $\bar{w} > 0$, $\bar{Q} > 0$ e $\bar{T}_0 > 0$. Si determinino le tre funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo $\tilde{w} = w - \bar{w}$ e di disturbo $\tilde{T}_0 = T_0 - \bar{T}_0$ e $\tilde{Q} = Q - \bar{Q}$) e l'uscita $\tilde{T}_1 = T_1 - \bar{T}_1$;
- B** Si consideri una legge di retroazione proporzionale $\tilde{w} = K_c(r_T - \tilde{T}_1)$, dove r_T è il riferimento di temperatura. Si studi al variare di K_c la stabilità dell'anello chiuso e l'errore a regime quando il riferimento sia costante e pari a ρ_T (Osservazione: gli incrementi di portata \tilde{w} diminuiscono la temperatura in uscita \tilde{T}_1 . Si consideri pertanto l'opportuno segno per K_c).

Si ipotizzi adesso che la temperatura da controllare, e di cui è disponibile la misura, sia quella alla fine della condotta, indicata da T_2 . Sia la condotta rigida, a sezione costante e adiabatica, e sia τ il tempo impiegato da un elemento di fluido per percorrere la condotta. Si ha quindi che $T_2(t + \tau) = T_1(t)$.

Si considerino i seguenti valori numerici: $m = 30$ kg, $c = 4186$ J/kg K, $\bar{w} = 0.3$ kg/s, $\bar{Q} = 75348$ J/s e $\bar{T}_0 = 288$ K.

- C** Determinare il massimo valore di τ affinché il controllore proporzionale $\tilde{w} = K_c(r_T - \tilde{T}_2)$ con $K_c = -1/4$ stabilizzi il sistema;
- D** Si consideri la seguente approssimazione:

$$G_{\tilde{T}_2}(s) = \frac{\tilde{T}_2(s)}{\tilde{w}(s)} \approx A \frac{1}{1 + \tau_p s} \frac{1 - s\tau/2 + s^2\tau^2/12}{1 + s\tau/2 + s^2\tau^2/12},$$

con $A = -200$, $\tau_p = 100$, e $\tau = 5$ s. Si determini una nuova legge di controllo per la portata \tilde{w} che, sulla base della misura di \tilde{T}_2 , agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

- d1)** la temperatura \tilde{T}_2 alla fine del condotto deve inseguire a regime un riferimento costante con errore minore del 5%, portandosi entro tale tolleranza in meno di 60 s.
- d2)** ipotizzando che il flusso termico Q allo scambiatore vari nel tempo piuttosto lentamente, e sia del tipo

$$Q = \bar{Q} + q(1 - \cos(\omega_q t)), \quad 0 < q < 5000 \text{ J/s}, \quad \omega_q \leq 10^{-2} \text{ rad/s},$$

si garantisca che la variazione indotta sulla temperatura \tilde{T}_2 non sia maggiore ± 1 K;

d3) garantire che il controllore di portata progettato ammetta un errore di temperatura finale pari al 5% nel caso in cui l'impianto utilizzi un diverso fluido il cui calore specifico è 3588 J/kg K.

Si riportino esplicitamente i diagrammi a blocchi delle varie componenti del sistema, il controllore ottenuto ed i diagrammi di Bode dell'anello aperto $C(s)G(s)$ e dell'anello chiuso $C(s)G(s)/[1+C(s)G(s)]$, visualizzando su essi le relative specifiche.

Soluzione

A Con riferimento ai valori di regime, il sistema non lineare complessivo all'equilibrio sarà dato da

$$\dot{\bar{T}}_1 = 0 = \frac{\bar{w}}{m}(\bar{T}_0 - \bar{T}_1) + \frac{\bar{Q}}{mc},$$

dal quale si ottiene il punto di equilibrio desiderato

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_0 + \frac{\bar{Q}}{c\bar{w}}.$$

Per ottenere le tre funzioni di trasferimento desiderate è necessario prima ottenere una rappresentazione lineare del sistema. A questo scopo si determina una rappresentazione del sistema lineare in forma di stato intorno all'equilibrio. Indicando come variabile di stato T_1 e definendo le variabili errore $\tilde{T}_1 = T_1 - \bar{T}_1$, $\tilde{w} = w - \bar{w}$, $\tilde{T}_0 = T_0 - \bar{T}_0$ e $\tilde{Q} = Q - \bar{Q}$, il sistema in esame avrà la rappresentazione riportata di seguito

$$\dot{\tilde{T}}_1 = -\frac{\bar{w}}{m}\tilde{T}_1 + \frac{c\bar{T}_0 - c\bar{T}_1}{mc}\tilde{w} + \frac{\bar{w}}{m}\tilde{T}_0 + \frac{1}{mc}\tilde{Q} = A\tilde{T}_1 + [B_w \quad B_{T_0} \quad B_Q] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{T}_0 \\ \tilde{Q} \end{bmatrix},$$

con uscita

$$y = \tilde{T}_1 = C\tilde{T}_1 + D \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{T}_0 \\ \tilde{Q} \end{bmatrix},$$

dove $D = [0, 0, 0]$. Questa rappresentazione ha equilibrio nell'origine per ingresso nullo, e corrispondente uscita nulla.

Le tre funzioni di trasferimento si ottengono dalla espressione

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{CB}{s - A}$$

dalla quale si ottiene

$$G(s) = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{Q}}{c\bar{w}(\bar{w}+sm)} & \frac{\bar{w}}{\bar{w}+sm} & \frac{1}{c(\bar{w}+sm)} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$G_w(s) = -\frac{\bar{Q}}{c\bar{w}(\bar{w} + sm)}, \quad G_{T_0}(s) = \frac{\bar{w}}{\bar{w} + sm} \quad \text{e} \quad G_Q(s) = \frac{1}{c(\bar{w} + sm)}.$$

B La legge in retroazione puramente proporzionale è illustrata in figura 2. Lo studio della stabilità a

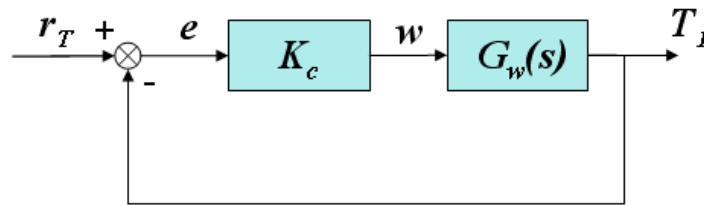


Figure 2: Schema a blocchi di un controllore proporzionale in retroazione negativa.

ciclo chiuso al variare del guadagno del controllore può essere fatto studiando il segno delle radici del denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso, cioè di $1 + K_c G_w(s)$, ovvero tracciando il luogo delle radici. La funzione di trasferimento $G_w(s)$ alla quale il controllore è applicato ha guadagno statico negativo, per cui, se K_c è positivo, al luogo delle radici si devono applicare le regole del luogo inverso (vedi figura 3-a). Il sistema risulta stabile solo per un limitato intervallo di valori $0 \leq K_c \leq \hat{K}_c$. Per calcolare il guadagno critico \hat{K}_c del controllore (guadagno oltre al quale si ha instabilità a ciclo chiuso), si valuta l'intersezione del luogo con l'asse immaginario risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1 + K_c G_w(s) = 0 \\ s = 0 + j\omega \end{cases}$$

nelle incognite K_c e ω . Sostituendo la seconda nella prima si ha

$$1 + K_c G_w(0 + j\omega) = 1 - K_c \frac{\bar{Q}}{mc\bar{w}(j\omega + \bar{w}/m)} = 0$$

$$\Leftrightarrow mc\bar{w}(j\omega + \bar{w}/m) - K_c \bar{Q} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{K}_c = \frac{c\bar{w}^2}{\bar{Q}} \\ \omega = 0 \end{cases} .$$

Scegliendo invece il segno negativo per K_c (ovvero una retroazione positiva), il luogo diretto delle radici indica la stabilità dell'anello chiuso per valori arbitrariamente elevati del guadagno del controllore (si veda la figura 3-b).

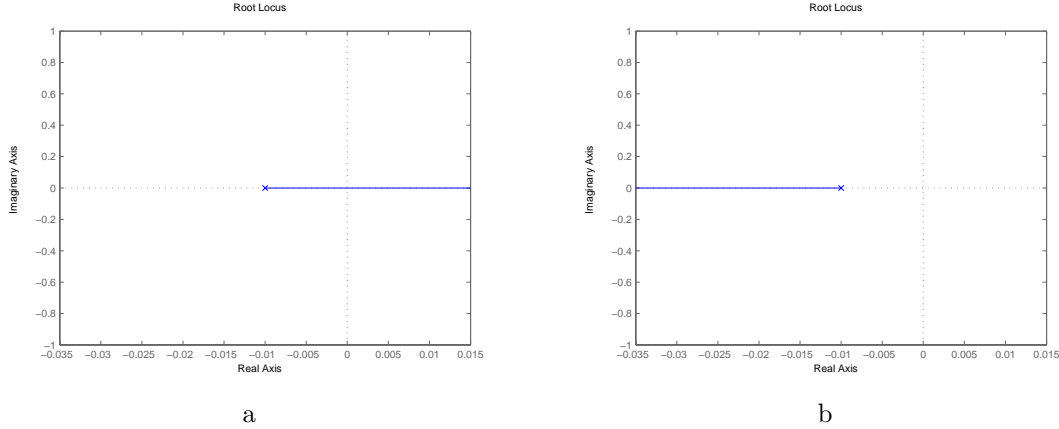


Figure 3: Luogo delle radici per retroazione negativa con $K_c > 0$ (a) e $K_c < 0$ (b).

L'errore a regime per riferimento costante per $-\infty < K_c \leq \hat{K}_c$ può essere calcolato applicando il teorema del Valore Finale alla funzione errore di inseguimento (N.B.: il teorema non può essere applicato per altri valori di K_c !). Si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \frac{\rho_T c \bar{w}^2}{c \bar{w}^2 - K_c \bar{Q}}, \quad -\infty < K_c \leq \hat{K}_c$$

dalla quale si nota che per K_c negativo e sufficientemente grande in modulo, l'errore a regime può essere ridotto arbitrariamente.

C Sostituendo i valori numerici riportati, le funzioni di trasferimento divengono

$$G_w(s) = -\frac{2}{s + 10^{-2}}, \quad G_{T_0}(s) = \frac{10^{-2}}{s + 10^{-2}} \quad \text{e} \quad G_Q(s) = \frac{7.96 \cdot 10^{-6}}{s + 10^{-2}}.$$

La relazione tra T_1 e T_2 , che modella il ritardo τ , è descritta nel dominio delle trasformate di Laplace da

$$T_2(s) = e^{-s\tau} T_1(s)$$

per cui la f.d.t. tra l'ingresso \tilde{w} e $\tilde{T}_2 = T_2 - \bar{T}_2 = T_2 - \bar{T}_1$ vale

$$T_2(s) = e^{-s\tau} G_w(s) \tilde{w}(s)$$

Per valutare il massimo ritardo sostenibile in modo da mantenere l'asintotica stabilità a ciclo chiuso con controllore proporzionale, che abbiamo stabilito in precedenza per $-\infty < K_c \leq \hat{K}_c$, si può applicare il Criterio di Nyquist. Si ricordi che il ritardo ha effetto solo sulla fase del sistema: infatti, $e^{-j\omega\tau}$ ha modulo unitario costante e fase $\angle e^{-j\omega\tau} = -\tau\omega$.

Posto $K_c = -1/4$, il margine di fase del sistema senza ritardo si ottiene facilmente valutando la pulsazione ω_T alla quale $|K_c G_w(j\omega)| = 1$, quindi $\omega_T = 0.5$ rad/s (lo stesso risultato si ottiene immediatamente dai diagrammi di Bode o Nyquist). Si ha in corrispondenza $M_f = \pi - \angle G_w(j\omega_T) = \pi/2$. Per il criterio di Nyquist, essendo il sistema stabile in anello aperto, esso rimane stabile in anello chiuso finché il diagramma non tocca, per effetto del ritardo, il punto $-1 + j0$. Si ha quindi che il massimo ritardo tollerabile si ottiene imponendo $\tau_m a x \omega_T = M_f$, quindi $\tau_m a x = M_f / \omega_T = \pi$ s.

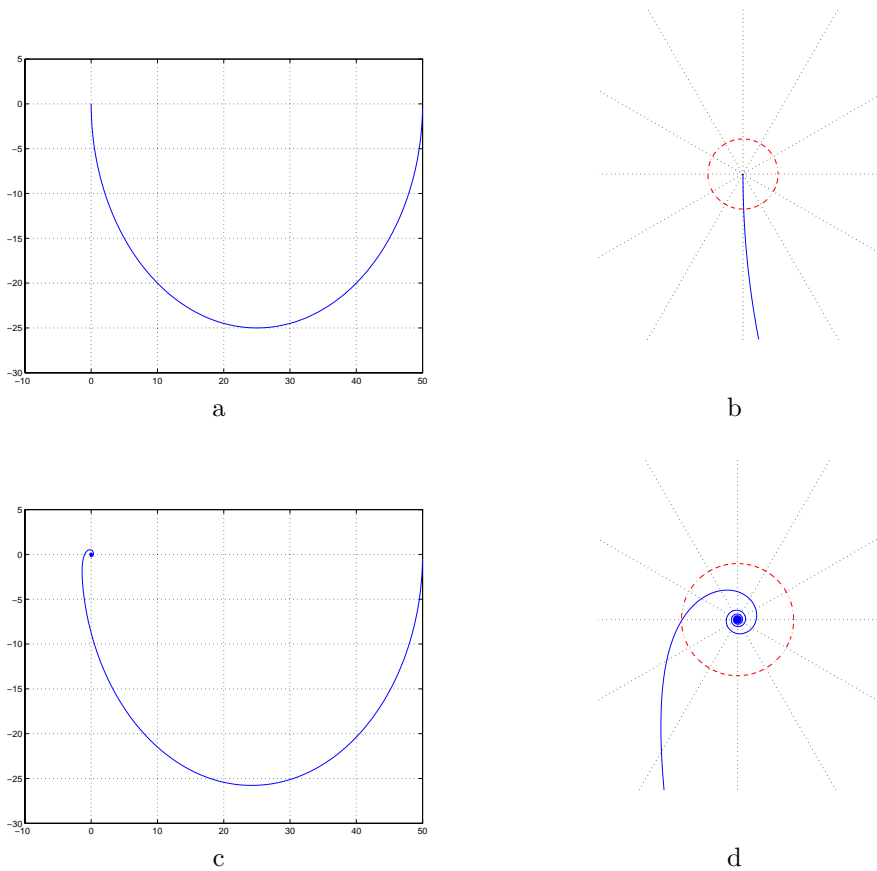


Figure 4: Diagramma di Nyquist delle funzioni di trasferimento $K_c G_w(s)$ (a, b) e $K_c G_w(s)e^{-s\tau}$ (c, d). Negli ingrandimenti della zona vicina all'origine (b e d) il cerchio unitario è mostrato in tratteggio.

Nella figura 4 è riportato il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento con ritardo. Nel diagramma di figura 4, il ritardo è pari a quello massimo ammissibile $\tau = \pi$ s, ed infatti si ha un attraversamento del punto -1 il che evidenzia come il sistema a ciclo chiuso sia solo marginalmente stabile.

D Il sistema in esame non ha poli a parte reale positiva: la approssimazione proposta per il ritardo

$$G_\tau(s) = \frac{s^2 - 1.2s + 0.48}{s^2 + 1.2s + 0.48} \approx e^{-s\tau}$$

(che è nota come approssimazione di Padé del secondo ordine) infatti non modifica la stabilità del sistema a ciclo aperto (si noti che il ritardo stesso può essere considerato stabile in anello aperto, nel senso che ad ogni ingresso limitato corrisponde una uscita limitata).

Il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere quindi affrontato direttamente sui diagrammi di Bode della funzione di trasferimento

$$G_{\hat{T}_2}(s) = G_w(s)G_\tau(s) = -\frac{2(s^2 - 1.2s + 0.48)}{(s + 0.01)(s^2 + 1.2s + 0.48)}$$

che sono riportati in figura 5. Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo considerando la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

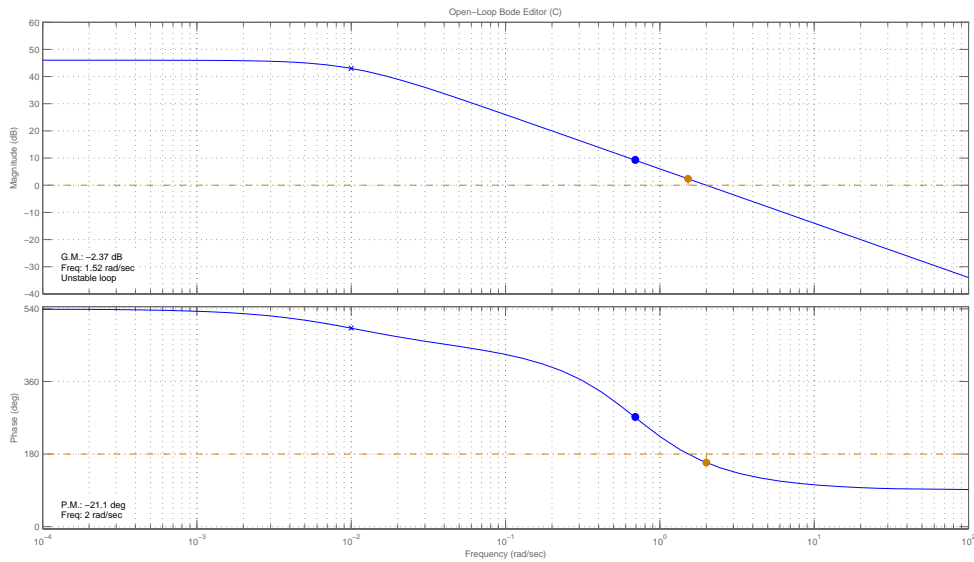


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{\tilde{T}_2}(s)$.

- d1) la specifica impone un errore di inseguimento al più pari al 5% del valore desiderato per riferimenti costanti di ampiezza generica $r(t) = A$. A questo scopo sarebbe sufficiente un controllore di tipo “0” con guadagno statico scelto in base alla relazione

$$\frac{1}{1 + k_c G_{\tilde{T}_2}(0)} \leq 0.05 \Rightarrow k_c \leq \frac{1 - 0.05}{0.05 G_{\tilde{T}_2}(0)} = -0.095$$

(si veda lo schema a blocchi complessivo di figura 6). Nella seconda parte della specifica, è

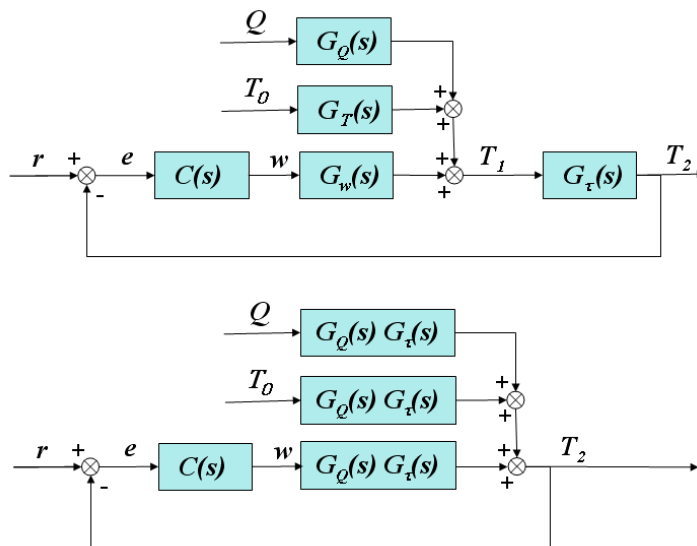


Figure 6: Schema a blocchi del sistema complessivo con ritardo.

richiesto un tempo di assestamento al 5% del valore del riferimento non superiore a 60 s, senza alcuna specifica sulla sovraelongazione. Si osservi che questa specifica richiede di entrare nella fascia del $\pm 5\%$ rispetto al valore di riferimento A , e non (come più comunemente avviene) rispetto al valore di regime raggiunto dal sistema. È a questo secondo caso che si applicano ad esempio la nota relazione tra banda passante e tempo di assestamento dei sistemi di primo

ordine $\omega_T = 3/T_a$: se usata nel nostro esempio, con la scelta di k_c appena fatta, T_a verrebbe a rappresentare il tempo entro il quale si raggiunge il 95% del regime, che è a sua volta il 95% del riferimento A , quindi si raggiungerebbe in T_a secondi solo il 90.25% del riferimento.

Per soddisfare la specifica, bisogna quindi usare un valore maggiore del guadagno statico del controllore k_c in modo da avere un segnale di regime che differisca meno di $\alpha\%$ dal riferimento A , e poi determinare un tempo di assestamento al $\beta\%$ tale che $(1 - \beta\%)(1 - \alpha\%) \geq (1 - 5\%)$. Si ricorda che il tempo di assestamento al $\varepsilon\%$ per sistemi del prim'ordine con polo in τ è pari a

$$T_{a\varepsilon} = -\frac{1}{\tau} \ln(0.01\varepsilon),$$

mentre per sistemi del secondo ordine con pulsazione naturale ω_n e smorzamento δ è pari a

$$-\frac{1}{\delta\omega_n} \ln(0.01\varepsilon).$$

Nel nostro caso, scelto un valore di $k_c = -2$ (comunque non elevato) si ottiene un valore di regime pari allo 99.75% del riferimento; è quindi sufficiente imporre che il tempo di assestamento al 96% $> (95\%/99.75\%)$ sia inferiore a 60 s.

Si osservi che, se si fosse deciso di usare un controllore di tipo 1, per il quale il valore di regime corrisponde al riferimento, la verifica del tempo di assestamento si sarebbe sostanzialmente semplificata.

Se il sistema è del primo ordine, o approssimabile con un polo dominante, dalle scelte fatte si ottiene quindi $\omega_T \geq -\ln(1 - 0.96)/60 = 0.051$ rad/s. Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio di prima approssimazione sono riportati in fig. 7. Si deve ancora

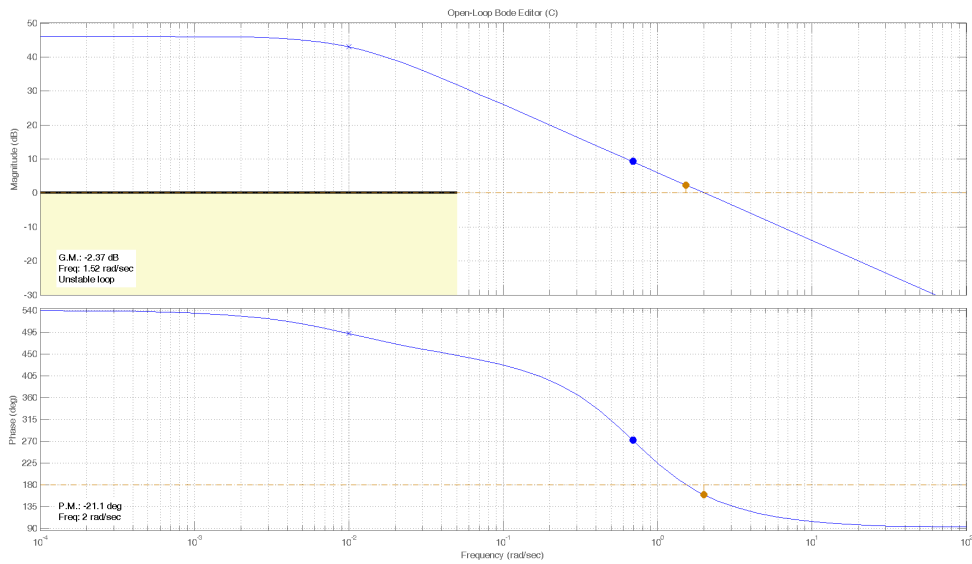


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{\bar{T}_2}(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio.

osservare che l'approssimazione a un polo dominante nel caso allo studio è da considerarsi con cautela. Infatti, se gli zeri a parte reale positiva del sistema in anello aperto cadono prima o nei pressi della pulsazione di taglio scelta, ci si deve attendere che essi introducano uno sfasamento ulteriore nella risposta del sistema in anello chiuso, quindi una riduzione del margine di fase ed un ritardo della risposta rispetto a quella stimata per il sistema ad un polo dominante. Nel nostro caso, la specifica di tempo di assestamento permette di scegliere una ω_T di almeno una decade più bassa della pulsazione del più lento degli zeri a fase non minima, il che permetterà di renderne limitati gli effetti negativi.

- d2)** supponendo che il sistema complessivo controllato a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile (mediante l'azione del controllore $C(s)$), è possibile applicare il teorema della risposta armonica ed il teorema del valore finale per calcolare l'influenza della variazione della potenza termica

Q . La fluttazione \tilde{Q} è infatti composta da una parte costante pari a q e da una parte variabile pari a $-q \cos(\omega_q t)$. Gli effetti di questi due termini devono essere studiati separatamente, e la loro somma non deve eccedere il limite specificato. Per semplificare il progetto, richiediamo cautelativamente che i due effetti presi separatamente non superino la metà del limite stesso. Per la parte costante del disturbo, si può applicare il teorema del Valore Finale alla funzione di trasferimento del disturbo in anello chiuso

$$\tilde{T}_2(s) = \frac{G_{\tilde{Q}}(s)G_\tau(s)}{1 + C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)} \tilde{Q}(s) = \frac{G_{\tilde{Q}}(s)G_\tau(s)}{1 + C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)} \frac{q}{s},$$

che ha lo stesso denominatore di

$$G_c(j\omega) = \frac{C(j\omega)G_{\tilde{T}_2}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_{\tilde{T}_2}(j\omega)},$$

e quindi asintoticamente stabile come da ipotesi, per la quale vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{T}_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_{\tilde{Q}}(s)G_\tau(s)}{1 + C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)} \frac{q}{s} = \frac{G_{\tilde{Q}}(0)}{1 + C(0)G_{\tilde{T}_2}(0)} q = \frac{\bar{w}}{c\bar{w}^2 - k_c \bar{Q}} q.$$

Chiedendo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{T}_2(t)| \leq 1/2$ K si ottiene

$$k_c \leq \frac{c\bar{w}^2 - 2q\bar{w}}{\bar{Q}} = -0.0348 \quad \text{ovvero} \quad k_c \geq \frac{c\bar{w}^2 + 2q\bar{w}}{\bar{Q}} = 0.0448$$

delle quali la seconda è in contrasto con la specifica **d1** e quindi sarà scartata, mentre la prima è già verificata dalla specifica **d1**.

Per la parte relativa alla funzione cosinusoidale si applica invece il teorema della risposta armonica. Notando che la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita \tilde{T}_2 è pari a

$$\tilde{T}_2(j\omega) = \frac{G_{\tilde{Q}}(j\omega)G_\tau(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_{\tilde{T}_2}(j\omega)} \tilde{Q}(j\omega) = \bar{G}_Q(j\omega) \tilde{Q}(j\omega)$$

si ha

$$\tilde{T}_2(t) = |\bar{G}_Q(j\omega)| [-q \cos(\omega t + \angle \bar{G}_Q(j\omega))].$$

Ricordando l'ipotesi fatta in precedenza, per pulsazioni $\omega < 10^{-2}$ rad/s si deve avere $|\tilde{T}_2(t)| \leq 1/2$ K, quindi

$$|\tilde{T}_2(t)| \leq q |\bar{G}_Q(j\omega)| \leq 1/2$$

ovvero

$$\left| \frac{G_{\tilde{Q}}(j\omega)G_\tau(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_{\tilde{T}_2}(j\omega)} \right| \leq \frac{1}{2q}.$$

Osservando dal diagramma di Bode di $G_{\tilde{Q}}G_\tau(s)$ (figura 8) che il massimo modulo nel range frequenziale considerato è pari al guadagno statico $\approx 8 \cdot 10^{-4} \approx -61$ db, si può porre

$$\left| \frac{8 \cdot 10^{-4}}{1 + C(j\omega)G_{\tilde{T}_2}(j\omega)} \right| \leq 10^{-4}$$

Questo significa che per pulsazioni $\omega < 10^{-2}$ rad/s si deve avere un guadagno sufficientemente elevato di $C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)$: passando in decibel, il controllore $C(s)$ deve soddisfare

$$|1 + C(j\omega)G_{\tilde{T}_2}(j\omega)| > 18 \text{ db}$$

ovvero, cautelativamente,

$$|C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)| > 18 \text{ db}.$$

Nella fig. 9 il vincolo relativo a questa specifica è riportato esplicitamente.

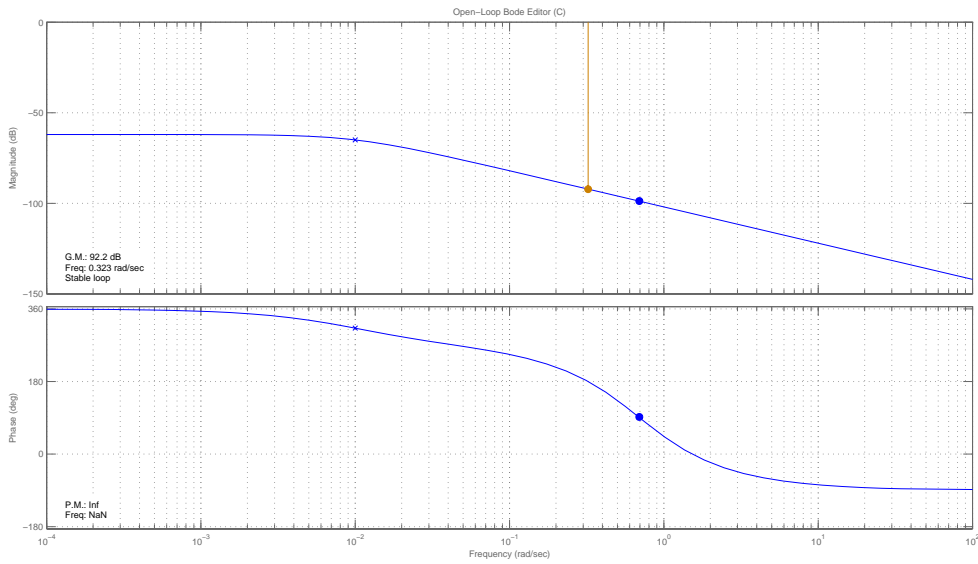


Figure 8: Diagramma di Bode della f.d.t. del disturbo sulla temperatura in ingresso $G_{\bar{Q}}(s)G_{\tau}(s)$.

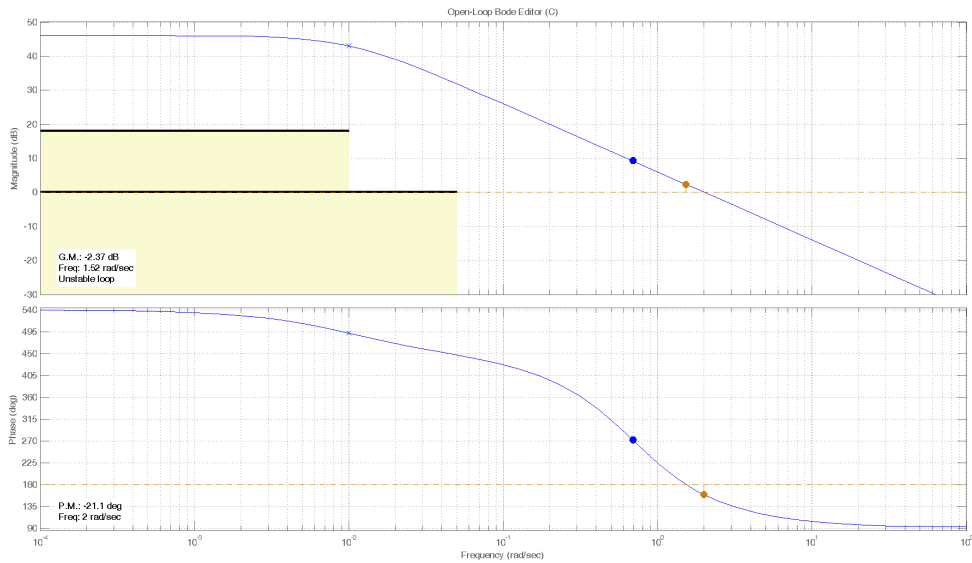


Figure 9: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{\tilde{T}_2}(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio e sui disturbi.

- d3) il terzo quesito si riferisce ad una specifica sulla sensibilità del sistema in anello chiuso alle variazioni parametriche. In particolare, esplicitando la f.d.t. in forma simbolica

$$G_{\tilde{T}_2}(s) = -\frac{\bar{Q}}{c\bar{w}(\bar{w} + sm)}G_{\tau}(s),$$

e notando che la specifica richiede $\Delta\tilde{T}_2(s)/\tilde{T}_2(s) = \Delta G_c(s)/G_c(s) \leq 0.05$, dove $G_c(s)$ è la f.d.t. a ciclo chiuso

$$G_c(s) = \frac{C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)}{1 + C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)},$$

si procede come di consueto

$$\frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \approx \frac{c}{G_c(s)} \frac{\Delta G_c(s)}{\Delta G_{\tilde{T}_2}(s)} \frac{\partial G_{\tilde{T}_2}(s)}{\partial c} \Big|_c \Delta c = S(s) \frac{\Delta c}{c},$$

dove con $S(s)$ si è indicata la sensibilità di anello. Infine, per ottenere robustezza nel caso in cui varii il calore specifico, si dovrà avere a regime

$$\frac{\Delta \tilde{T}_2(0)}{\tilde{T}_2(0)} \approx S(0) \frac{1}{7} \leq 0.05 \Rightarrow C(0)G_{\tilde{T}_2}(0) \geq \frac{100}{35} \Rightarrow |C(0)G_{\tilde{T}_2}(0)| \geq 10 \text{ db.}$$

La specifica risulta pertanto già risolta dal soddisfacimento della specifica **d2**.

Un possibile controllore dinamico $C(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche è il seguente

$$C(s) = -2 \frac{50s + 1}{1.4 \cdot 10^3 s + 1},$$

per il quale il diagramma di Bode del guadagno d'anello è riportato in figura 10. Si noti che il

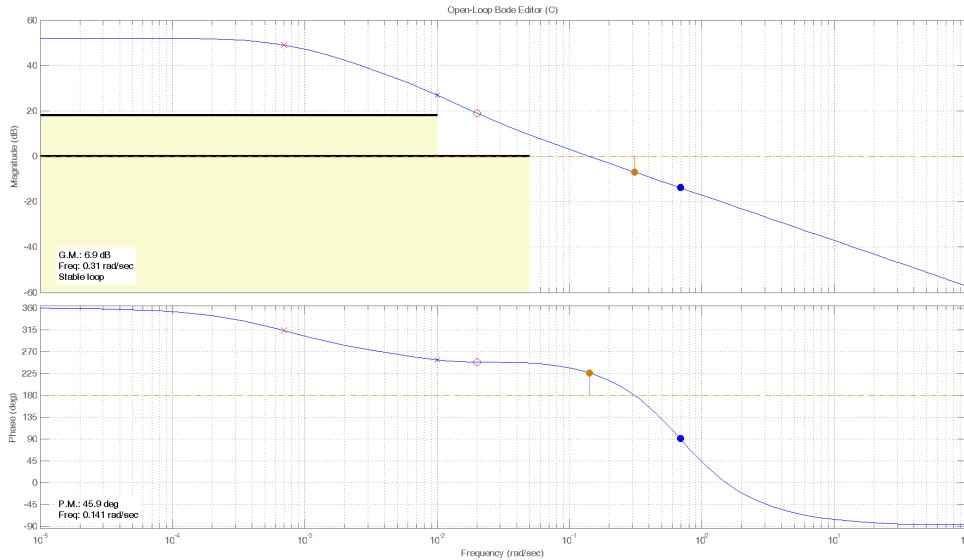


Figure 10: Diagramma di Bode risultante dal progetto del guadagno di anello $C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)$.

controllore presenta un polo stabile a bassa frequenza ed il guadagno desiderato $k_c = -2$ negativo per preservare la stabilità a ciclo chiuso e rispettare le specifiche a bassa frequenza. Inoltre, lo zero prima dell'attraversamento consente di tagliare l'asse a 0 db con una pendenza di -20 db per decade. Ciononostante l'approssimazione del primo ordine per il sistema a ciclo chiuso non è rigorosamente rispettata (come precedentemente anticipato) a causa dello sfasamento dovuto agli zeri a fase non minima che approssimano il ritardo. Il margine di fase è in effetti pari a $\pi/4$, invece del valore $\pi/2$ che si avrebbe da una valida approssimazione del primo ordine. In figura 11 è riportato il diagramma di bode del sistema controllato. La risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione differirà perciò da una risposta di un sistema del primo ordine e presenterà una certa sovralongazione. Il progetto risulta comunque essere buono, come mostrato dalla risposta al gradino unitario del sistema controllato, riportata in figura 12-a, e rispetta le specifiche. In figura 12-b) è riportato la risposta al gradino unitario il sistema con il vero ritardo (cioè non approssimato con la $G_r(s)$). Si noti come in questo caso cambi la risposta al gradino unitario negli istanti iniziali: nell'approssimazione si ha l'effetto degli zeri a fase non minima, mentre in questo caso l'uscita è semplicemente nulla.

Nella figura 13 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla potenza termica sia del tipo $q[1 - \cos(\omega_q t)]$ con $\omega_q = 10^{-2}$. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando l'ingresso desiderato. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento

$$\frac{G_{\tilde{Q}}(s)G_r(s)}{1 + C(s)G_{\tilde{T}_2}(s)}.$$

Come si nota dalle verifiche sperimentali riportate in figura 12 e 13, il sistema controllato rispetta tutte le specifiche di progetto.

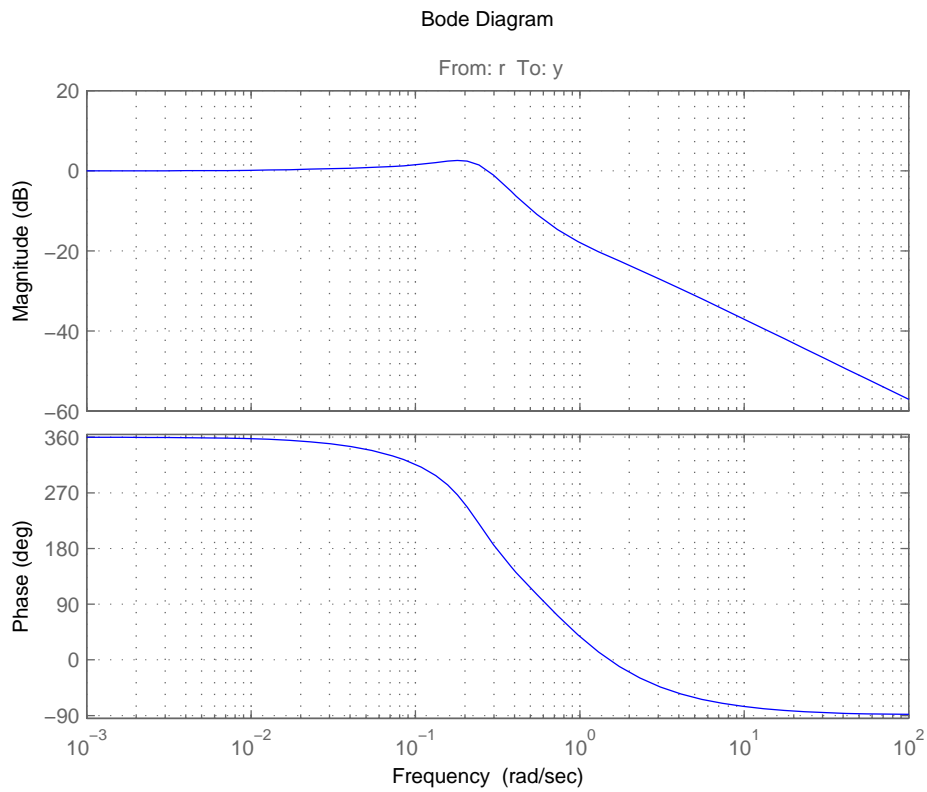
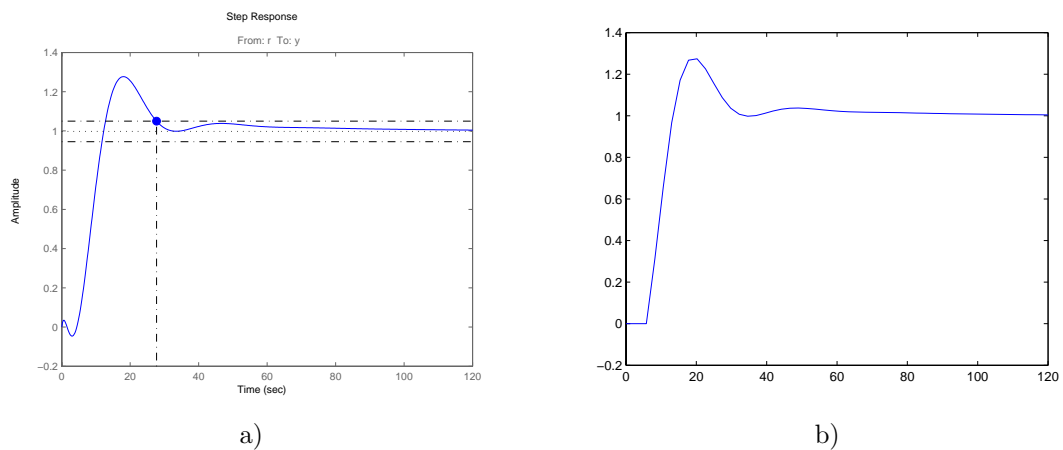


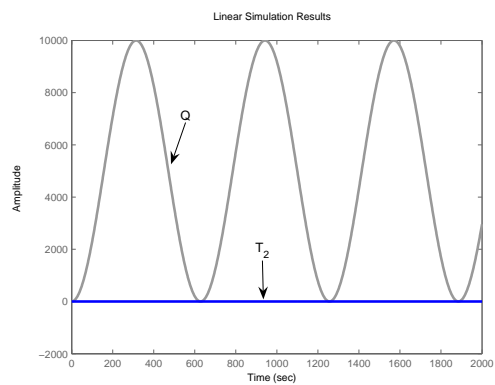
Figure 11: Diagramma di Bode del sistema controllato.



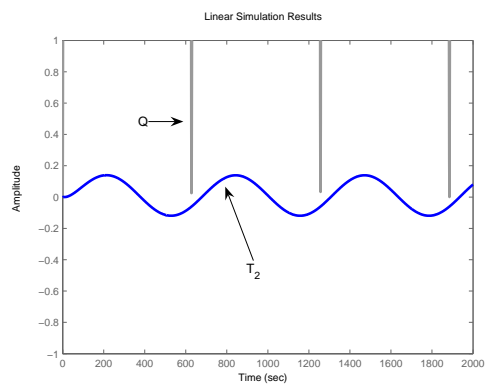
a)

b)

Figure 12: Risposta al gradino del sistema controllato con approssimazione del ritardo $G_\tau(s)$ (a) e con il vero ritardo $e^{-s\tau}$ (b).



a)



b)

Figure 13: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale applicato come disturbo sulla potenza termica (a) e relativo zoom (b).