

Si consideri il sistema meccanico riportato in Figura 1.

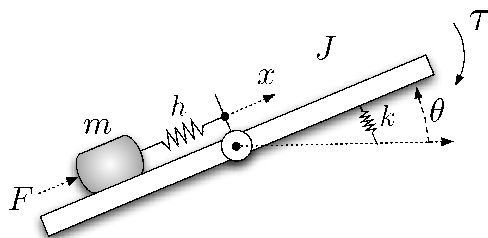


Figura 1: Schema meccanico.

Esso è costituito da una piattaforma in grado di ruotare attorno ad un asse orizzontale sulla quale scorre una massa  $m$ . Si indichi con  $\theta$  l'angolo di rotazione della piattaforma rispetto al piano orizzontale e con  $x$  la distanza della massa dall'asse di rotazione. La piattaforma è collegata all'asse di rotazione attraverso una molla torsionale di costante elastica  $k$  e posizione di riposo  $\theta = 0$ . Una massa è libera di scorrere sulla piattaforma rimanendo collegata all'asse di rotazione attraverso una molla di costante elastica  $h$  e lunghezza di riposo nulla. Il modello dinamico associato è descritto dal seguente sistema di equazioni non lineari:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F - mg \sin \theta - C_a \dot{x} + m\dot{\theta}^2 - hx \\ (J + mx^2)\ddot{\theta} &= -k\theta - mx(g \cos \theta + 2\dot{x}\dot{\theta}) - \tau \end{aligned}$$

dove  $J$  è il momento di inerzia associato alla piattaforma,  $C_a$  il coefficiente di attrito e  $g$  l'accelerazione gravitazionale.

Si considerino i seguenti valori numerici:  $m = 0.15$  kg,  $J = 750$  kgm<sup>2</sup>,  $C_a = 1.5$  Ns/m e  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

**A** Si consideri inizialmente il sistema con il solo ingresso di controllo  $F$  ( $\tau = 0$ ).

- A1)** Si determinino le relazioni tra  $x$  e  $\theta$  che caratterizzano gli equilibri del sistema;
- A2)** si discuta la stabilità dell'equilibrio corrispondente a  $\bar{\theta} = 0$ , al variare delle costanti elastiche  $h$  e  $k$ ;
- A3)** assumendo i valori numerici  $h = 0.1$  N/m e  $k = 5$  Nm/rad, e supponendo di poter agire sul sistema tramite la forza  $F$  e di poter misurare l'angolo della piattaforma  $\theta$ , si progetti un controllore in grado di stabilizzare il sistema e di garantire un errore nullo per inseguimento di un ingresso a gradino.

**B** Si consideri adesso il sistema con il solo ingresso  $\tau$  ( $F = 0$ ).

- B1)** Si confronti la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tau$  e l'uscita  $\theta$  con quella ottenuta in precedenza per il rapporto tra  $F$  e  $\theta$ , e si discutano le differenze dandone un'interpretazione fisica;
- B2)** si progetti un controllore che permetta di stabilizzare l'uscita  $\theta$  utilizzando l'ingresso di controllo  $\tau$ .

## Soluzione

**A** Posto  $x = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}] = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ , l'equazione dinamica in forma di stato del sistema ha la seguente forma

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-mg \sin \theta - C_a x_3 + m x_1 x_4^2 - h x_1 + F}{m} \\ \frac{-k x_2 - m x_1 (g \cos \theta + 2 x_3 x_4) - \tau}{J + m x_1^2} \end{bmatrix}$$

**A1** Gli equilibri si ottengono ponendo  $f(x, u) = 0$  con  $\ddot{x} = \ddot{\theta} = \dot{x} = \dot{\theta} = 0$ .

$$\begin{cases} F - mg \sin \theta - h x_1 = 0 \\ -k \theta - mg x_1 \cos \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\bar{F} - mg \sin \theta}{h} \\ \theta = \frac{-k \theta}{mg \cos \theta} \end{cases} \quad (1)$$

Dalla (1) si può facilmente vedere che il punto  $F = 0, x = 0, \theta = 0$  è un punto di equilibrio. Supponiamo  $F = 0$  e  $\theta \neq 0$ . Otteniamo

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\theta} = \frac{hk}{m^2 g^2} \quad (2)$$

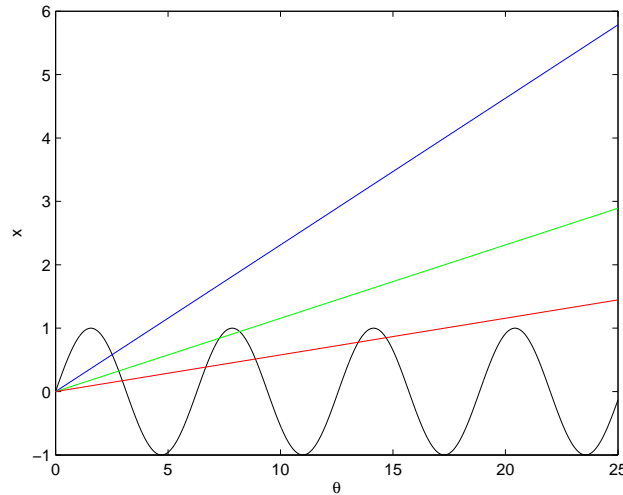


Figura 2: Punti di equilibrio

Poichè  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$  otteniamo

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{hk}{m^2 g^2} \theta, \quad (3)$$

che può essere studiata graficamente al fine di determinare qualitativamente l'andamento degli equilibri al variare della costante  $C = \frac{hk}{m^2 g^2}$ . Le intersezioni fra le due curve in Fig. 2 costituiscono i punti di equilibrio del sistema nel caso in cui  $F = 0$ . Come si può facilmente vedere i

valori dei parametri  $h, k, m$  influenzando direttamente il valore di  $C$  e determinano il numero delle soluzioni, il quale decresce all'aumentare del modulo di  $C$  ( $C = 0.23$  retta di colore blu;  $C = 0.11$  retta di colore verde;  $C = 0.06$  retta di colore rosso).

**A2** Il punto di equilibrio considerato è quello corrispondente a  $x = \theta = F = 0$ . Il sistema linearizzato risulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h/m & -g & -C_a/m & 0 \\ -gm/J & -k/J & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix} F.$$

Al fine di valutare la stabilità del punto di equilibrio assegnato al variare delle costanti elastiche  $h$  e  $k$ , calcoliamo la funzione di trasferimento tra  $\theta$  e  $F$ , e ne analizziamo il polinomio al denominatore utilizzando il metodo di Routh-Hourwitz. Per calcolare la f.d.t utilizziamo la trasformata di Laplace ricavando  $X(s)$  dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima ottenendo  $\Theta(s)$  in funzione di  $F(s)$

$$s^2 X(s) = \frac{F(s)}{m} - \frac{hX(s)}{m} - \frac{CasX(s)}{m} - g\Theta(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s) - gm\Theta(s)}{h + Cas + ms^2} \quad (4)$$

$$s^2 \Theta(s) = -\frac{gmX(s)}{J} - \frac{k\Theta(s)}{J} \quad (5)$$

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{-gm}{Jms^4 + JCas^3 + (km + Jh)s^2 + KCas + (hk - g^2m^2)}$$

Poichè la domanda richiede di analizzare la stabilità del punto di equilibrio al variare dei valori delle costanti elastiche del sistema, è possibile sostituire nella f.d.t tutti i valori costanti assegnate, tranne quelli di  $h$  e  $k$ . Otteniamo

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{-1.47}{112.5s^4 + 1125s^3 + (750h + 0.15k)s^2 + 1.5ks + (hk - 2.1609)}$$

Costruiamo la tabella di Routh

112.5	750h + 0.15k	hk - 2.1609
1125	1.5k	
750h	hk - 2.1609	
$\frac{3.2414}{h}$		
(hk - 2.1609)		

Il Criterio di Routh- Hourwitz afferma che il numero di cambiamenti di segno della prima colonna della tabella, qualora tutti ben definiti, indica il numero di radici positive del polinomio analizzato (in questo caso poli instabili). Al fine di ottenere la stabilità dell' equilibrio dobbiamo avere

$$\begin{cases} h \geq 0 \\ h > 0 \\ hk - 2.1609 \geq 0 \end{cases} \rightarrow h > \frac{2.1609}{k}$$

**A3** Sostituendo i valori assegnati la f.d.t del sistema risulta

$$P(s) = \frac{-0.01307}{s^4 + 10s^3 + 0.6733s^2 + 0.06667s - 0.01476}$$

che ha due poli complessi coniugati a parte reale negativa, uno reale negativo ed uno reale positivo

$$\begin{aligned} p_1 &= -9.9329 \\ p_2 &= -0.0735 + 0.1149i \\ p_3 &= -0.0735 - 0.1149i \\ p_4 &= 0.0799. \end{aligned}$$

In Fig. 3 è riportato il luogo delle radici della funzione di trasferimento tra l'angolo  $\theta$  e la forza  $F$ .

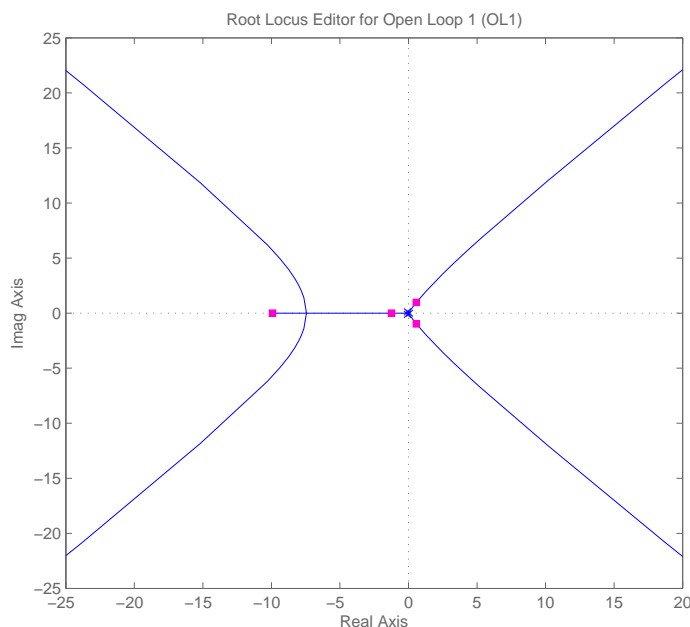


Figura 3: Luogo delle radici della f.d.t. tra l'angolo  $\theta$  e la forza  $F$  ( $P(s)$ ).

Le specifiche richiedono la progettazione di un controllore in grado di stabilizzare il sistema ed in grado di inseguire un ingresso di riferimento a gradino con errore nullo.

Al fine di ottenere un errore nullo per inseguimento di un ingresso a gradino, è necessario inserire nel controllore un integratore. Essendo richiesta solo la stabilità, è possibile procedere con la progettazione di un unico controllore, utilizzando ad esempio il luogo delle radici. L'architettura del sistema di controllo risulta quella di Fig. 4.

Per poter stabilizzare la funzione in ciclo chiuso si può procedere cercando di spostare verso sinistra i rami del luogo delle radici (Fig. 5) in modo che i poli della f.d.t in ciclo chiuso risultino nel semipiano negativo. Inserendo due coppie di zeri complessi coniugati ( $-1.3 \pm 0.75j$ ,  $-0.25 \pm 0.5j$ ) ed alzando il valore del guadagno statico del controllore si riesce a soddisfare entrambe le specifiche. Introducendo tre poli, ad esempio in  $-50$  per rendere il controllore realizzabile, il controllore utilizzato risulta

$$C = -500 \frac{(1 + 1.2s + 0.4489s^2)(1 + 1.2s + 3.24s^2)}{s(1 + 0.02s)^3}$$

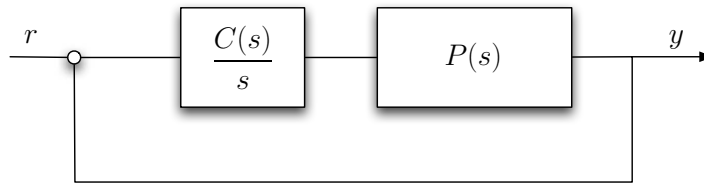


Figura 4: Struttura di controllo con singolo controllore

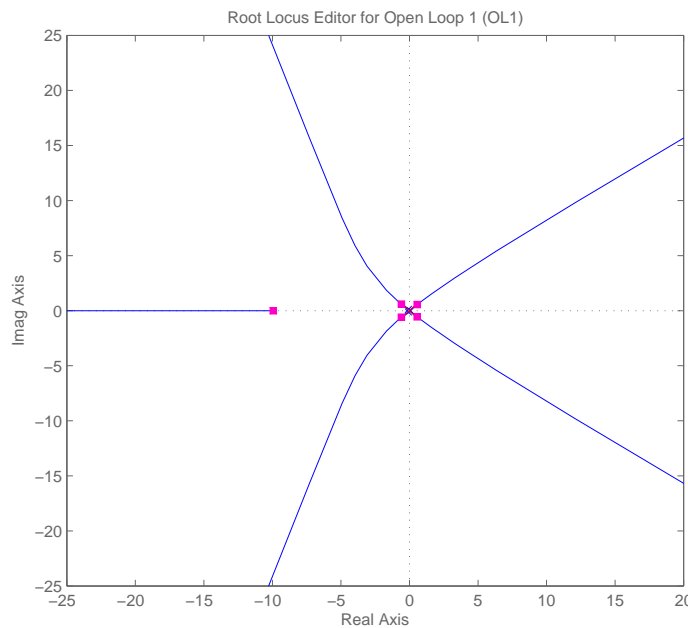


Figura 5: L

Le figure seguenti riportano il luogo delle radici (Fig. 6(a),6(b)), il diagramma di bode (Fig. 7), e la risposta del sistema controllato per un riferimento ad un gradino unitario (Fig. 8).

In alternativa sarebbe stato possibile utilizzare la tecnica del doppio anello di controllo (Fig. 9) progettando prima un controllore in grado di stabilizzare il sistema ( $C(s)$ ), e successivamente progettare il controllore in grado di garantire errore nullo per inseguimento di un ingresso a gradino ( $C_1(s)$ ) sul nuovo sistema ottenuto dalla retroazione del sistema originale con il controllore stabilizzante.

**B B1** La funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\theta$  e l'uscita  $\theta$  può essere semplicemente calcolata utilizzando la trasformata di Laplace partendo dalle equazioni 4 e 5. In particolare, ponendo  $F(s) = 0$  in 4 ed aggiungendo il termine relativo alla coppia  $\tau(s)$  in 5, otteniamo

$$\frac{\Theta(s)}{\tau(s)} = \frac{h + Cas + ms^2}{Jms^4 + JCas^3 + (km + Jh)s^2 + KCas + (hk - g^2m^2)}$$

La f.d.t. ovviamente ha lo stesso denominatore e quindi il sistema ha gli stessi poli; tuttavia adesso il numeratore non è costante, ma vi sono due zeri reali negativi. Questo risulta essere abbastanza intuitivo in quanto agendo sulla coppia  $\tau$  è possibile intervenire direttamente sul valore dell'angolo  $\theta$ , che quindi risentirà in modo più veloce di ogni attuazione effettuata

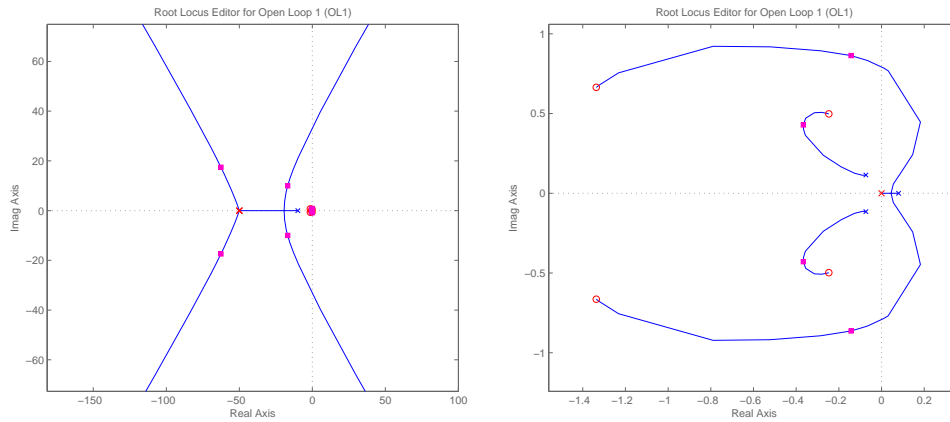


Figura 6: Luogo delle radici del sistema controllato (a); dettaglio per valori vicino all'origine (b)

attraverso l'ingresso  $\tau$ . La differenza poli-zero, o grado relativo, di una f.d.t. è infatti un indice di quanto direttamente un ingresso agisce su una uscita (il concetto è chiarissimo nei sistemi tempo discreto, dove il grado relativo coincide con il primo campione della uscita che risente dell'ingresso).

Inoltre, a causa della presenza degli zeri è possibile, assegnate le condizioni iniziali, trovare un particolare valore dell'ingresso  $\tau$  tale per cui non si produce nessuna variazione sull'angolo misurato  $\theta$ . In particolare, ad esempio nel caso in cui  $Ca = 0$ , una volta assegnate le condizioni iniziali, (sia  $x = -2$ ) è possibile trovare un ingresso sinusoidale (Fig. 10(a))

$$U = D \cos(\omega t) \quad D = 2.94, \quad \omega = 0.816496837599,$$

in grado di garantire in ogni istante la compensazione della forza peso della massa, in modo che questa oscilli (Fig. 10(b)) senza produrre nessuno scostamento sull'angolo  $\theta$  (Fig. 10(c)).

**B2** La Fig. 11 riporta il luogo delle radici della f.d.t tra l'angolo  $\theta$  e la coppia  $\tau$ .

La specifica richiede la stabilizzazione del sistema in ciclo chiuso. La specifica può essere semplicemente rispettata utilizzando un controllore proporzionale con valori di guadagno negativi piuttosto elevati. In alternativa è possibile realizzare un controllore più complesso in grado di spostare i rami del luogo delle radici, e di conseguenza anche i poli, nel semipiano negativo. Procediamo nello stesso modo già utilizzato nel punto A3 inserendo una coppia di zeri complessi coniugati in  $-2.75 \pm 1.25j$  e impostando opportunamente il guadagno del controllore. Al fine di rendere il controllore realizzabile inseriamo anche due poli in  $-5$ . Il controllore risulta

$$C(s) = -10 \frac{1 + 0.6s + 0.1089s^2}{(1 + 0.2s)^2}$$

Le figure 12, 13 riportano il luogo delle radici ed il diagramma di bode del sistema controllato.

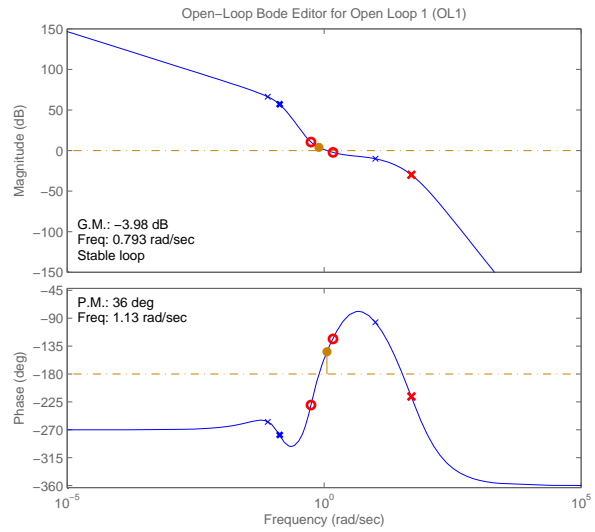


Figura 7: Diagrammi di Bode del sistema controllato

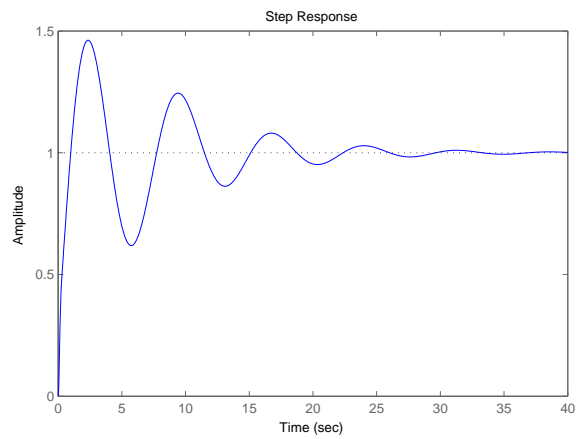


Figura 8: Risposta del sistema controllato per un riferimento a gradino unitario

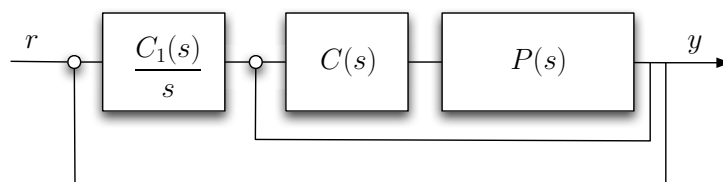


Figura 9: Architettura di controllo a doppio anello.

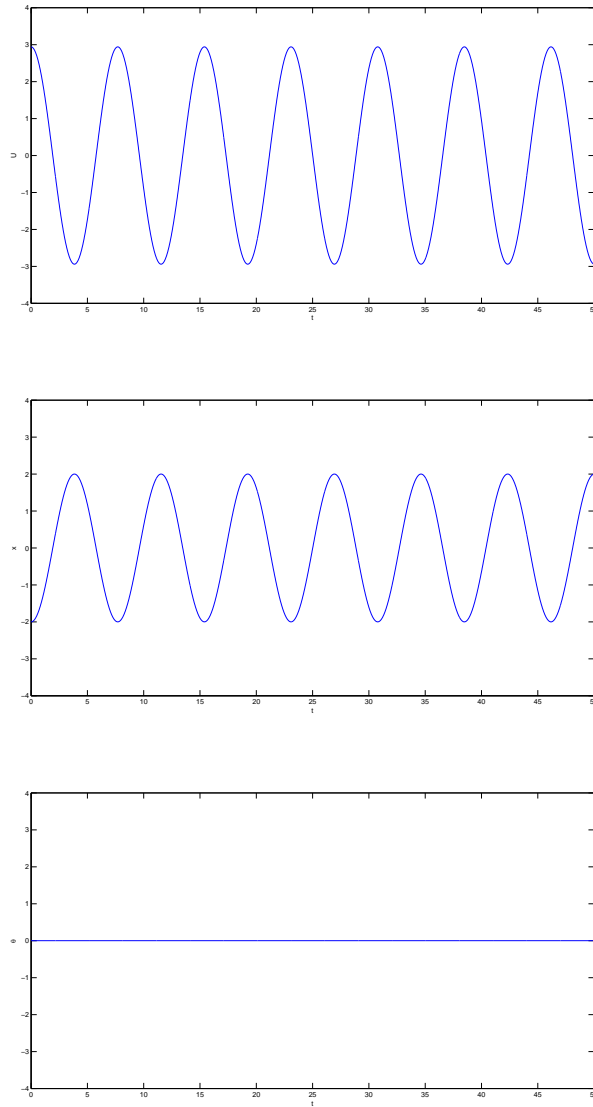


Figura 10: Risultati della simulazione del sistema applicando come ingresso  $u(t) = D \cos(\omega t)$ , con  $D = 2.94$ ,  $\omega = 0.816496837599$  10(a) e le corrispondenti variazioni su  $\theta$  10(c) e su  $x$  10(b).



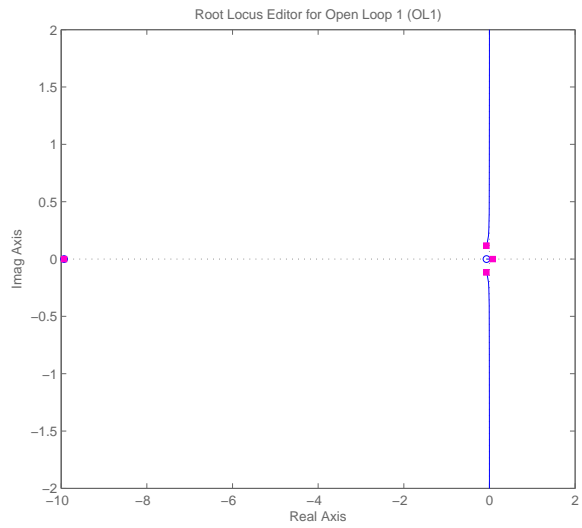


Figura 11: Luogo delle radici delle f.d.t. tra  $\theta$  e  $\tau$ .

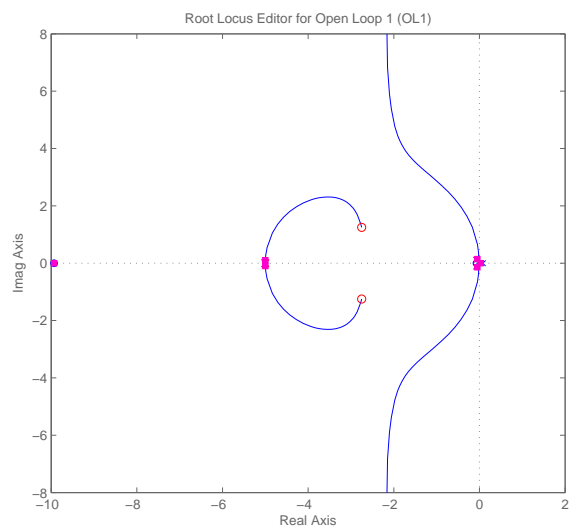


Figura 12: Luogo delle radici del sistema controllato.

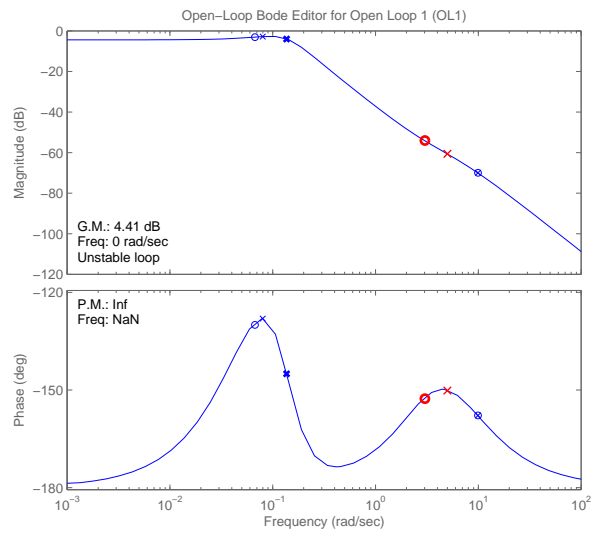


Figura 13: Diagramma di Bode del sistema controllato.