

Si consideri il semplice schema di veicolo a trazione posteriore riportato in figura 1, il cui modello

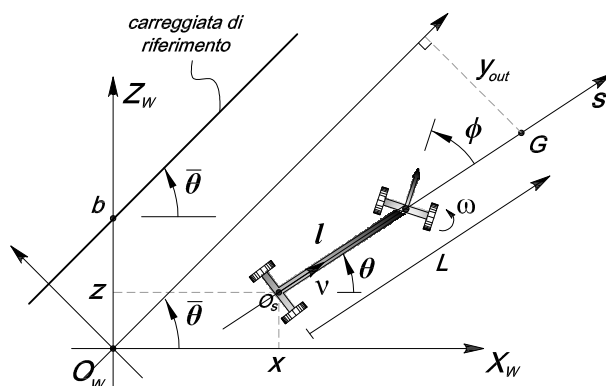


Figure 1: Modello cinematico del veicolo considerato.

cinematico è

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu \cos \theta \\ \dot{z} = \nu \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{\nu}{l} \tan \phi \\ \dot{\phi} = \omega, \end{cases}$$

dove  $[x, z]$  è la posizione del punto mediano dell'asse posteriore,  $\theta$  è l'angolo tra l'asse longitudinale  $s$  del veicolo e l'asse  $X_W$ , e  $\phi$  l'angolo di sterzata. La velocità di avanzamento  $\nu$  dell'asse posteriore è assunta costante in modulo, pari a  $\nu_0$ , e diretta lungo l'asse  $s$ , che forma l'angolo  $\theta$  con l'asse orizzontale. La guida del veicolo avviene attraverso la variabile di controllo  $\omega$ , ovvero la velocità di sterzata.

Si supponga di voler stabilizzare il veicolo sulla mezzzeria di una carreggiata la cui equazione è  $z = \tan \bar{\theta} x + b$  con  $0 \leq \bar{\theta} < \pi/2$ .

**A** Si scelga come uscita

$$y = z \cos \bar{\theta} - x \sin \bar{\theta} + L \sin(\theta - \bar{\theta}),$$

cioè l'ordinata rispetto ad un sistema di riferimento ruotato di  $\bar{\theta}$  rispetto a  $\langle W \rangle$ , del punto  $G$  lungo l'asse  $s$ , a distanza  $L$  dal punto  $O_s$ . Si determini il modello linearizzato in forma di stato nell'intorno di un moto nominale lungo la retta stessa, che può essere descritto da

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \cos(\bar{\theta}) \nu_0 t \\ \bar{z}(t) = \sin(\bar{\theta}) \nu_0 t + b \\ \bar{\theta}(t) = \bar{\theta} \\ \bar{\phi}(t) = 0. \end{cases}$$

**B** Si scriva la funzione di trasferimento, in forma simbolica, associata al sistema linearizzato calcolato al punto precedente discutendo sulla posizione assunta dai poli e dagli zeri del sistema in relazione ai possibili valori dei parametri  $L$  e  $\nu_0$ . Si dia inoltre una interpretazione fisica circa la posizione degli zeri.

**C** Si considerino adesso i seguenti valori numerici per i parametri in gioco nel modello linearizzato del veicolo:  $l = L = 1$  m,  $\nu_0 = -12$  m/s. Scegliendo opportunamente il riferimento  $r(t)$  da inseguire nonché il valore iniziale dell'uscita del sistema, si determini una legge di controllo che permetta al veicolo di stabilizzarsi sulla retta di equazione  $z = x + b$ , con  $b = 10\sqrt{2}$ , a partire dalle condizioni iniziali  $x = 0$ ,  $z = b/2$ ,  $\bar{\theta} = \pi/4$  e  $\phi = 0$ , garantendo che il veicolo, a partire dalla configurazione iniziale indicata, si stabilizzi esattamente sulla mezzzeria della carreggiata (cioè la retta) entrando e mantenendosi tra due rette di equazioni  $z_1 = x_1 + 14.5$  e  $z_2 = x_2 + 13.8$  rispettivamente, in un tempo non superiore a 1.5 s senza mai oltrepassare il cammino geometrico di riferimento, ossia la mezzzeria della carreggiata.

## Soluzione

**A** Il sistema è descritto da quattro variabili di stato  $x$ ,  $z$ ,  $\theta$ , e  $\phi$ . Al fine di ottenere il sistema linearizzato nell'intorno della traiettoria data, cioè una generica retta di pendenza  $\bar{\theta}$  e intercetta  $b$ , si considerino le seguenti nuove variabili di stato che definiscono le variazioni rispetto all'equilibrio, cioè

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x - v_o \cos \bar{\theta} t \\ \tilde{x}_2 = z - v_o \sin \bar{\theta} t - b \\ \tilde{x}_3 = \theta - \bar{\theta} \\ \tilde{x}_4 = \phi, \end{cases}$$

e la corrispondente variazione di uscita  $\tilde{u} = \omega$ .

Il sistema nonlineare scritto in termini delle variabili di stato  $\tilde{x}$  e ingresso  $\tilde{u}$  è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = v_o \cos(\tilde{x}_3 + \bar{\theta}) - v_o \cos(\bar{\theta}) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = v_o \sin(\tilde{x}_3 + \bar{\theta}) - v_o \sin(\bar{\theta}) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{v_o}{l} \tan \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \tilde{u}, \end{cases}$$

con funzione di uscita,

$$\tilde{y}_{out} = \tilde{x}_2 \cos \bar{\theta} + \cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta} v_o t + b \cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta} (\tilde{x}_1 + v_o \cos \bar{\theta} t) + L \sin \tilde{x}_3.$$

Derivando e calcolando nell'equilibrio delle nuove variabili di stato  $\tilde{x}$  e  $\tilde{u}$ , ovvero l'origine, si ottiene il sistema linearizzato, nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{z} &= C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_o \sin \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & v_o \cos \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v_o}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [-\sin \bar{\theta} \quad \cos \bar{\theta} \quad L \quad 0]; & D &= 0 \end{aligned}$$

**B** La funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tilde{u}$  e l'uscita  $\tilde{y}_{out}$  può essere calcolata tramite la formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

dalla quale si ottiene:

$$G(s) = \frac{v_o L (s + \frac{v_o}{L})}{s^3}.$$

Il sistema linearizzato possiede tre poli nell'origine, che indicano l'esistenza di modi polinomialmente divergenti. Il numeratore della f.d.t. presenta uno zero in  $-\frac{v_o}{L}$ ; il segno di questo zero dipende dal segno della velocità  $v_o$  del veicolo e dalla posizione del punto  $G$  rispetto al quale viene misurata l'uscita del sistema. Infatti, per velocità  $v_o > 0$ , lo zero sarà a parte reale positiva se  $L > 0$ , ovvero se  $G$  è anteriore. Viceversa sarà negativo se  $L < 0$ , ovvero posto dietro all'asse posteriore del veicolo. Ovviamente la situazione si inverte se  $v_o < 0$  (moto in retromarcia): in tal caso infatti, per  $L > 0$ , lo zero è a parte reale positiva. Fisicamente, si può osservare in questo caso il fenomeno di inversione della risposta al gradino per la quale nelle manovre in retromarcia l'avantreno del veicolo si sposta dalla mezzeria prima in direzione opposta a quanto avviene nelle fasi successive della manovra.

Si noti infine che per  $L = 0$  il sistema non possiede nessuno zero.

**C** Sostituendo i valori numerici nella f.d.t. calcolata al punto precedente, si ottiene

$$G(s) = -12 \frac{(s - 12)}{s^3}.$$

Il progetto di un controllore che soddisfi contemporaneamente alla stabilità ed alle specifiche statiche e dinamiche potrebbe essere svolto direttamente sui diagrammi di Bode. Tuttavia, per semplificare il progetto si preferisce preliminarmente procedere con la sintesi di un primo controllore stabilizzante e poi successivamente progettare un secondo controllore in grado di soddisfare alle specifiche statiche e dinamiche: si procede cioè con la tecnica del doppio anello in cascata (vedi figura 2). A tal proposito, si consideri il luogo delle radici del sistema  $G(s)$  riportato in figura 3.

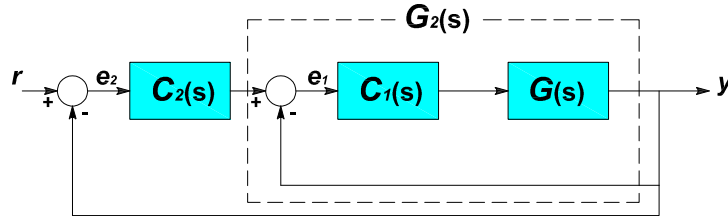


Figure 2: Schema a blocchi per il progetto del controllore.

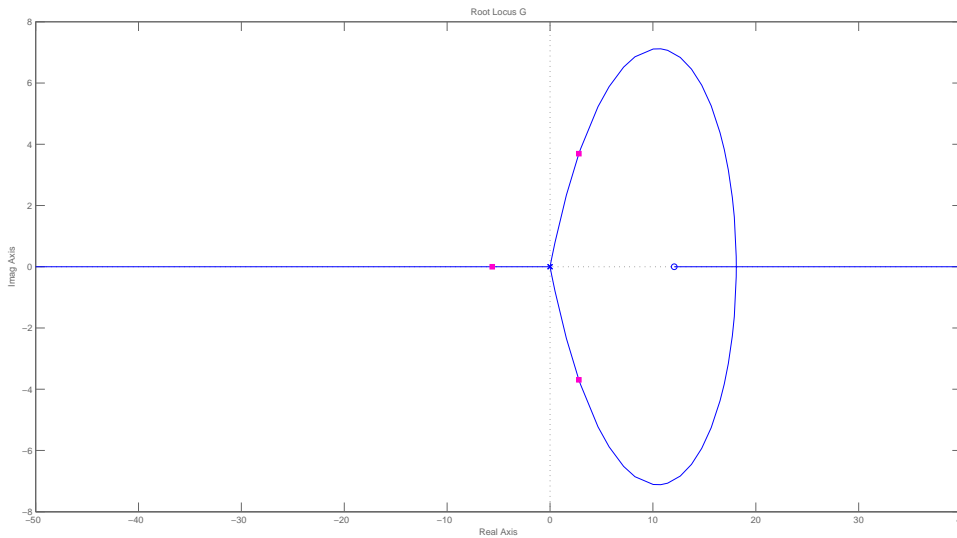


Figure 3: Luogo delle radici della f.d.t.  $G(s)$ .

Il luogo delle radici presenta due rami uscenti dall'origine, ossia da due dei tre poli presenti in tale posizione, che si sviluppano interamente nel semipiano destro fino ad arrivare entrambi sull'asse reale positivo in un punto alla destra dello zero a fase non minima dove, per qualche valore del guadagno d'anello, il sistema in anello chiuso presenterebbe una coppia di poli reali instabili coincidenti. Questo rende il sistema non stabilizzabile per qualsiasi valore del guadagno d'anello negativo (la f.d.t. presenta un guadagno negativo, quindi quello in figura 3 è il cosiddetto luogo inverso delle radici). D'altra parte, un guadagno del controllore negativo non risolverebbe il problema in quanto il luogo delle radici diretto presenterebbe un ramo interamente contenuto nel semipiano positivo dall'origine fino allo zero a fase non minima, complicando ulteriormente il progetto.

Consideriamo quindi il caso in cui il guadagno del controllore è positivo, ovvero il luogo inverso delle radici per la funzione d'anello  $C_1(s)G(s)$ . Al fine di attrarre nel semipiano sinistro, almeno per qualche valore positivo del guadagno del controllore, i due rami di  $G(s)$  che si sviluppano interamente nel semipiano destro, è necessario inserire almeno due zeri reali negativi in prossimità dell'origine. Questo rende possibile il passaggio dei due rami nel semipiano sinistro prima della richiusura in quello destro, rendendo di fatto possibile scegliere il guadagno del controllore in maniera tale da rendere stabile il sistema complessivo. Ovviamente il controllore ottenuto non è causale: si rende perciò opportuno inserire almeno due poli sufficientemente lontani dagli zeri, nel semipiano sinistro. Un possibile controllore quindi in grado di rendere asintoticamente stabile l'anello chiuso con

l'impianto è il seguente:

$$C_1(s) = 11.342 \frac{(s+1)(s+0.5)}{(s^2+40s+425)}.$$

La f.d.t.  $G_1(s)$  in anello chiuso è

$$G_1 = -113.42 \frac{(s-12.07)(s+1)(s+0.5)}{(s+31.17)(s+2.898)(s+0.4518)(s^2+5.477s+16.77)},$$

la quale, pur avendo tutti i poli a parte reale negativa, presenta ovviamente anche tutti gli zeri del sistema in anello aperto, compreso quello a fase non minima presente nell'impianto. I diagrammi di bode della f.d.t.  $G_1(s)$  sono riportati in figura 4.

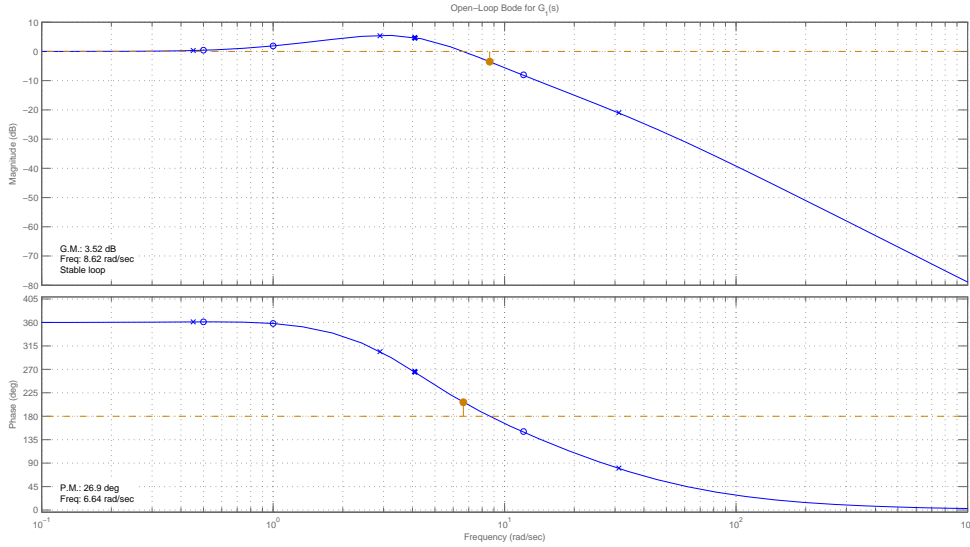


Figure 4: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G_1(s)$ .

Avendo a disposizione una f.d.t. asintoticamente stabile anche se comunque a fase non minima, è possibile procedere con la ricerca di un secondo controllore  $C_2(s)$ , il cui progetto può essere affrontato sui diagrammi di Bode, in grado di soddisfare le ulteriori specifiche.

A tal proposito si consideri un prototipo di controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

ed iniziamo con la scelta del *tipo*  $t$  e della costante di guadagno  $k_c$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche. La specifica in tal caso richiede un errore nullo a regime, cioè il veicolo deve portarsi esattamente sulla mezzeria della carreggiata ovvero sulla retta di equazione  $z = x + 10\sqrt{2}$ . Per tale motivo, poichè  $G_1(s)$  non possiede poli nell'origine, è necessario porre  $t = 1$  nel controllore. La costante  $k_c$  sarà aggiustata successivamente per rispettare la specifica sulla banda passante.

Il controllore  $C_2(s)$ , il cui progetto è basato sul modello linearizzato del veicolo attorno al percorso di riferimento, deve garantire che l'uscita  $\tilde{y}_{out}$  del sistema passi dal valore iniziale  $\tilde{y}_{out}(0) = \frac{b}{2} \cos \bar{\theta} = 5$ , calcolabile sostituendo i valori opportuni all'istante  $t = 0$  nelle variabili di stato  $\tilde{x}$  che compaiono in  $\tilde{y}_{out}$  ad un valore finale  $\tilde{y}_{out}(\infty) = b \cos \bar{\theta} = 10$ , senza mai superare la mezzeria della carreggiata, ovvero tentando di realizzare un sistema a ciclo chiuso ben approssimabile con un sistema ad un polo dominante, con tempo di assestamento al 5%<sup>1</sup> non superiore a 1.5 s. Questo si traduce nel richiedere una banda passante, ovvero una pulsazione di taglio pari a

$$\omega_T = \frac{3}{T_a} = 2 \text{ rad/s}.$$

La figura 5 riporta i diagrammi di Bode con specifica sulla banda passante e controllore  $C_2(s) = 1/s$ .

<sup>1</sup>Tale valore può essere calcolato con:  $\frac{b_{max} - b}{b - b_{min}} = \frac{14.5 - 10\sqrt{2}}{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}} = 0.05$

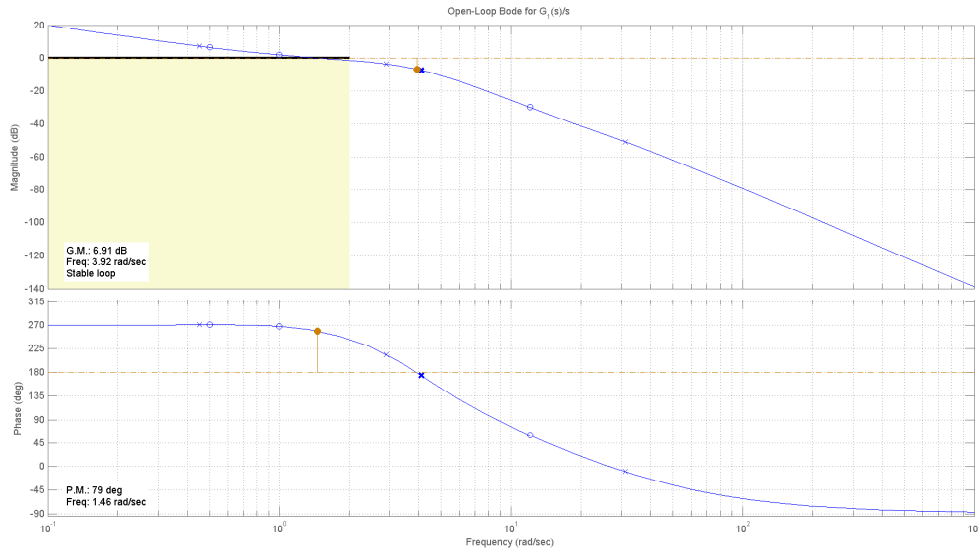


Figure 5: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G_1(s)/s$  con specifica sulla  $\omega_T$ .

Se il sistema fosse a fase minima, al fine di rispettare le specifiche date sarebbe stato necessario che il diagramma delle ampiezze attraversasse l'asse a 0 dB oltre la pulsazione di taglio con una pendenza pari a  $-20$  dB/dec e con le altre singolarità sufficientemente lontane dall'attraversamento. Questo continua ad essere vero finché il taglio avviene sufficientemente prima della pulsazione corrispondente allo zero a fase non minima (circa una decade meno un'ottava prima). In primo luogo si può procedere in maniera tale da rendere il diagramma di Bode a pendenza pari a  $-20$  dB/dec per tutto il tratto in bassa frequenza prima della pulsazione corrispondente allo zero a fase non minima: questo può essere fatto semplicemente cancellando opportunamente poli o zeri a fase minima.

Tuttavia, l'influenza dello zero positivo a meno di una decade dopo la pulsazione di taglio fa sì che non sia rispettata la specifica sul tempo di assestamento. Si procede quindi con l'inserimento di una rete anticipatrice per recuperare la fase la cui riduzione è dovuta alla presenza dello zero a fase non minima nelle vicinanze della pulsazione di taglio.

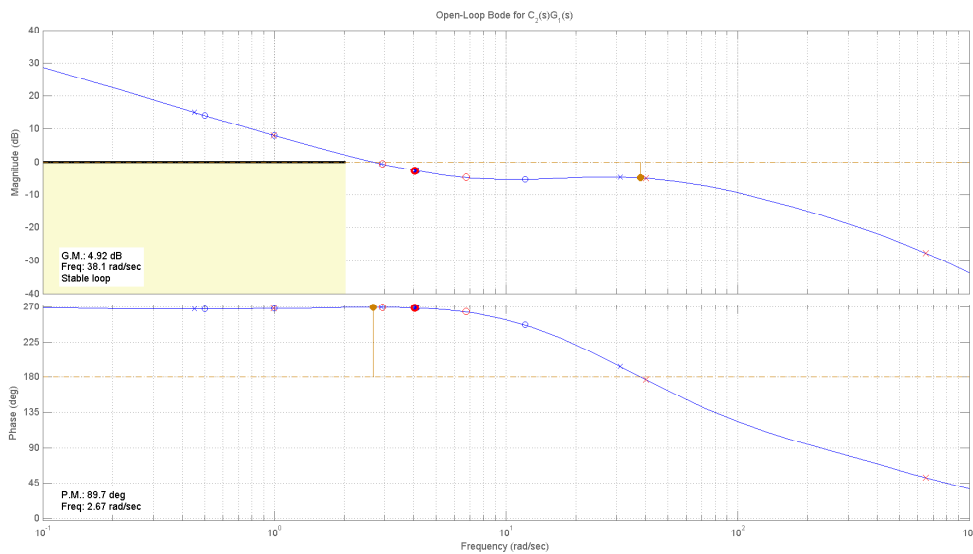


Figure 6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C_2(s)G_1(s)$  con specifiche.

Il controllore finale necessario per rispettare tutte le specifiche, comprese quelle sulla causalità è:

$$C_2(s) = 218.74 \frac{(s + 2.92)(s + 6.71)(s^2 + 5.4s + 16.34)}{s(s + 1)(s + 40.1)(s + 650.5)},$$

mentre la f.d.t.  $G_c$  a ciclo chiuso risulta

$$G_c(s) = -24808.665 \frac{(s + 2.926)(s + 6.709)(s + 1)(s + 0.5)(s - 12.07)(s^2 + 5.398s + 16.34)}{(s + 690.7)(s + 2.831)(s + 2.195)(s + 1.005)(s + 0.5128)(s^2 + 5.518s + 16.69)(s^2 + 28.79s + 1301)}$$

la cui risposta al gradino è riportata in figura 7. La risposta al gradino presenta il tipico andamento dovuto alla presenza dello zero a fase non minima, cioè inversione iniziale della risposta rispetto al valore di regime. Dall'andamento della risposta si evince anche che la approssimazione del sistema in anello chiuso ottenuto con un sistema del primo ordine non può considerarsi del tutto soddisfatta. Tuttavia le specifiche risultano ampiamente soddisfatte.

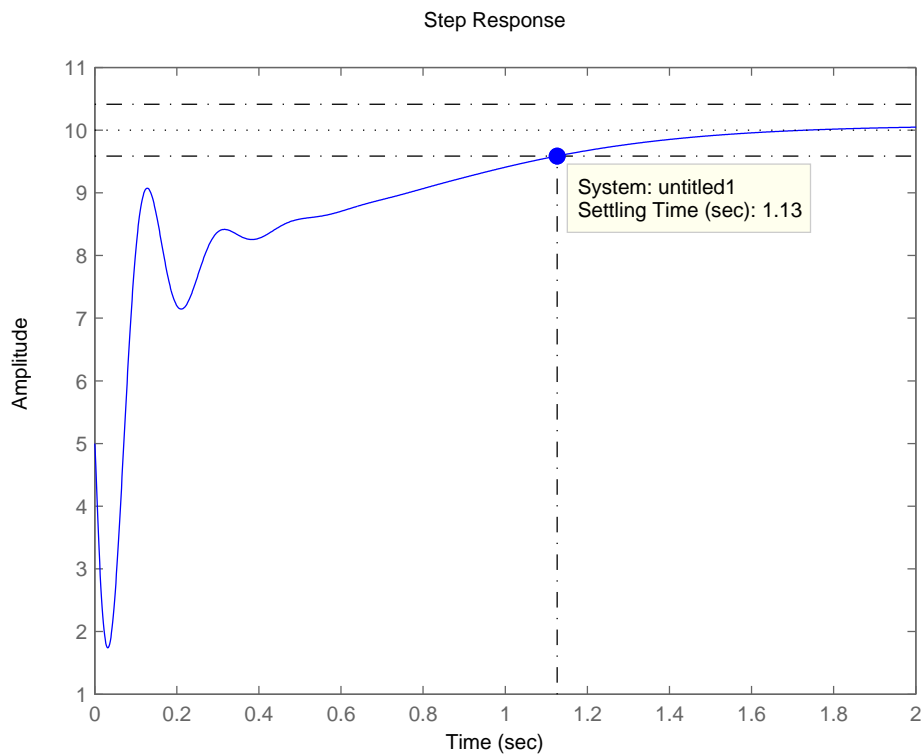


Figure 7: Risposta al gradino di ampiezza  $b \cos \bar{\theta}$  a partire dal valore iniziale  $\frac{b}{2} \cos \bar{\theta}$ .