Fondamenti di Automatica — 13-06-2013

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

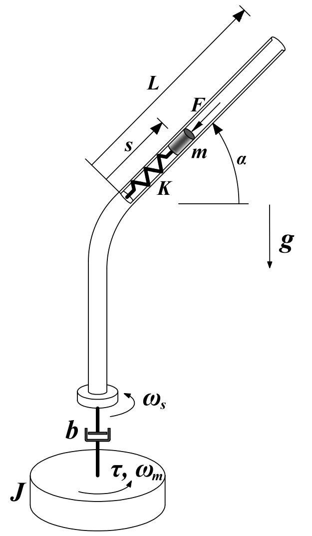

Figura 1: Sistema meccanico

Esso è costituito da una struttura tubolare di massa trascurabile la cui parte superiore, di lunghezza L, è curvata e forma un angolo α rispetto all'orizzontale. All'interno della parte tubolare superiore scorre senza attrito una massa m connessa alla base attraverso una molla di costante elastica k. La struttura è connessa per mezzo di uno smorzatore viscoso con coefficiente di smorzamento b ad un motore che può mettere in rotazione la struttura e far si che la massa m scorra verso l'alto per effetto della forza centrifuga dovuta alla velocità di rotazione. Sulla massa m agisce inoltre una forza di disturbo F diretta nella direzione di moto della massa stessa.

Indicando con s la posizione della massa m sul cavo, con s_0 la posizione a riposo della molla, con ω_s la velocità di rotazione della struttura e con ω_m la velocità di rotazione del motore (vedi figura 1), le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{s} + k(s - s_0) + m\,g\,\sin\alpha - m\,s\,\cos^2\alpha\,\omega_s^2 &= F \\ m\,s^2\,\cos^2\alpha\,\dot{\omega}_s + 2m\,s\,\dot{s}\,\omega_s\cos^2\alpha &= b(\omega_m - \omega_s) \\ J\dot{\omega}_m &= \tau - b(\omega_m - \omega_s) \end{aligned}$$

A Si determini l'equilibrio del sistema corrispondente a velocità di rotazione $\bar{\omega}_s = \bar{\omega}_m$ costante, massa m in posizione di riposo per la molla e disturbo $F = 0$.

B Supponendo di disporre della misura della posizione s della massa m, e di poter agire sulla coppia τ, si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici: $k = 5$ N/m; $b = 0.5$ N m s; $m = 1$ Kg; $s_0 = 0.5$ m; $g = 9.81$ m/s^2; $J = 2$ Kg m^2; $\alpha = \pi/6$; $L = 1.1$ m.

C Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso $u = \tau$ e l'uscita $y = s$, e tra il disturbo $u_d = F$ e l'uscita $y = s$. Si discuta inoltre la stabilità dell'equilibrio del sistema linearizzato e se ne dia una interpretazione fisica.

D Si determini una legge di controllo per l'ingresso $u = \tau$ che agisca in modo tale da garantire che:

- **D.1** partendo dalle condizioni di equilibrio, la massa raggiunga la posizione $s = 1$ m con un errore minore a 0.5 cm senza uscire fuori dal tubo, ed entrando mantenendosi in un intervallo pari a $s = 1$ m ± 2.5 cm entro un tempo non superiore a 100 ms;
- **D.2** l'effetto di un disturbo di forza sulla massa del tipo $F = 1 + \sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{(3k-1)} \sin(\omega_k\,t)$ con $\omega_k = \frac{1}{k^2}$ rad/s a regime non comporti una variazione sulla posizione della massa superiore a 2.5 cm.

Si riportino quindi:

- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato;
- il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare;
- la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

E Si scriva una funzione `Matlab` che simuli la dinamica discretizzata del controllore progettato discutendo la scelta del tempo di campionamento. Si effettui poi una simulazione del sistema linearizzato chiuso in retroazione con il controllore discretizzato.