

Figure 1: Modello di un sistema di bilanciamento

Si consideri il sistema riportato in fig.1 in cui un corpo di massa m scorre su una piattaforma che può ruotare liberamente attorno ad un asse passante per il suo baricentro. La piattaforma, di massa M e lunghezza L , è ancorata a terra tramite due molle e due smorzatori collegati alle sue estremità. Siano b il coefficiente di attrito radente tra il corpo e la piattaforma, e b_1 e b_2 i coefficienti di attrito dei due smorzatori. Siano K_1 e K_2 le costanti elastiche delle molle tra la piattaforma ed il telaio, e K_s la costante di una molla che agisce tra il corpo e la piattaforma, esercitando una forza di richiamo sul corpo verso il punto centrale della piattaforma che non ha braccio rispetto al fulcro. Siano θ l'angolo che la piattaforma forma con l'asse orizzontale e x la distanza del corpo dall'asse di rotazione.

La dinamica del sistema è descritta dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f - K_s x - b\dot{x} + m x \dot{\theta}^2 - m g \sin \theta, \\ \left(\frac{1}{12} M L^2 + m x^2 \right) \ddot{\theta} = -m g x \cos \theta - 2 m x \dot{x} \dot{\theta} - (K_1 + K_2) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - (b_1 + b_2) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}. \end{cases}$$

A) Si caratterizzino gli equilibri del sistema per $f = \bar{f}$ costante.

Si assumano i seguenti valori numerici per i parametri del sistema: $m = 5$ Kg, $M = 10$ Kg, $L = 1$ m, $g = 9.8$ m/s², $K_s = 100$ N/m, $b = 5$ Ns/m, $b_1 = 1.5$ Ns/m, $b_2 = 10$ Ns/m.

Per le costanti elastiche K_1 e K_2 si considereranno invece i due casi a) $K_1 = K_2 = 10$ N/m e b) $K_1 = K_2 = 1$ N/m.

B) Si consideri di voler controllare, agendo mediante la forza f , la distanza x del corpo di massa m dal fulcro della piattaforma. Si linearizzi quindi il sistema nell'intorno del punto di equilibrio con $x = 0$, riportando la forma di stato e la funzione di trasferimento del sistema ottenuto, e si discuta la stabilità dell'equilibrio nei casi a) $K_1 = K_2 = 10$ N/m e b) $K_1 = K_2 = 1$ N/m.

C) Si consideri invece di voler controllare, agendo ancora sulla forza f , l'angolo θ della piattaforma. Si linearizzi quindi il sistema nell'intorno del punto di equilibrio con $\theta = 0$, riportando la forma di stato e la funzione di trasferimento del sistema ottenuto, e si discuta la stabilità dell'equilibrio nei casi a) $K_1 = K_2 = 10$ N/m e b) $K_1 = K_2 = 1$ N/m.

D) Si discutano le differenze tra i risultati ottenuti nei due punti precedenti, cercando di darne una interpretazione fisica;

E) Per il caso di controllo dell'angolo θ con $K_1 = K_2 = 10$ N/m, si sintetizzi un controllore per la forza f nel modello linearizzato del sistema tale da:

- portare la piattaforma a raggiungere l'angolo $\hat{\theta} = \pi/10$ con un errore a regime non superiore all'1% e senza mai superare una inclinazione di $\pi/9$;
- raggiungere l'angolo desiderato entro una tolleranza del 5% in un tempo non superiore a 0.1 s;

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode della funzione di anello aperto con le relative specifiche da rispettare;

- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative;
- Si scriva il codice di un programma di calcolo, ad esempio in linguaggio Matlab, che implementi in tempo discreto una approssimazione del comportamento dinamico del controllore, discutendo sulla scelta del tempo di campionamento.

F) Ripetere il progetto del punto precedente nel caso $K_1 = K_2 = 1N/m$.

Soluzioni

- A) Per trovare i punti di equilibrio relativi all'ingresso $f = 0$, è necessario porre $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ e $\dot{\theta} = 0$. Si ottiene in questo modo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = -K_s x - m g \sin \theta, \\ 0 = -x m g \cos \theta - (K_1 + K_2) \left(\frac{L}{2}\right)^2 \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

La prima equazione risulta soddisfatta per $\bar{x} = -m g \sin \bar{\theta} / K_s$. Sostituendo nella seconda equazione si trovano equilibri in $\bar{\theta} = \pm \pi / 2$ e $\bar{x} = \mp m g / K_s$. L'unico altro equilibrio possibile è in $\bar{\theta} = \bar{x} = 0$, ad eccezione del caso particolare in cui $m^2 g^2 = K_s (K_1 + K_2) \left(\frac{L}{2}\right)^2$, caso nel quale tutti gli angoli θ sono di equilibrio con il corrispondente valore di $x = -m g \sin \theta / K_s$.

- B) Scegliendo come variabili di stato $[z_1, z_2, z_3, z_4]^T = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$ il sistema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = z_4 \\ \dot{z}_3 = \frac{f}{m} - \frac{K_s}{m} z_1 - \frac{b}{m} z_3 + z_1 z_4^2 - g \sin z_2 \\ \dot{z}_4 = -\frac{m g}{J(z_1)} z_1 \cos z_2 - \frac{(K_1 + K_2)}{J(z_1)} \frac{L^2}{4} \sin z_2 \cos z_2 - \frac{(b_1 + b_2)}{J(z_1)} \frac{L^2}{4} \cos^2(z_2) z_4 - 2 m z_1 z_3 z_4, \end{cases} \quad (1)$$

con $J(z_1) = \left(\frac{1}{12} M L^2 + m z_1^2\right)$.

Linearizzando il sistema in un intorno del punto di equilibrio $\hat{X} = [0, 0, 0, 0]^T$, si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_s}{m} & -g & -\frac{b}{m} & 0 \\ -12 \frac{m g}{M L^2} & -3 \frac{K_1 + K_2}{M} & 0 & -3 \frac{b_1 + b_2}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0.$$

Sostituendo ai parametri i rispettivi valori numerici, nel caso $K_1 = K_2 = 10$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & -9.8 & -1 & 0 \\ -58.86 & -6 & 0 & -3.45 \end{bmatrix}.$$

e

$$G_{x,10}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{0.2(s^2 + 3.45s + 6)}{(s + 5.07)(s - 2.437)(s^2 + 1.818s + 37.02)}$$

Il sistema risulta quindi instabile intorno a questo equilibrio.

Nel caso invece di $K_1 = K_2 = 1$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & -9.8 & -1 & 0 \\ -58.86 & -0.6 & 0 & -3.45 \end{bmatrix}.$$

e

$$G_{x,1}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{0.2(s + 0.1871)(s + 3.266)}{(s + 5.598)(s - 2.857)(s^2 + 1.709s + 35.36)}$$

Il sistema linearizzato risulta quindi instabile.

- C) Se l'uscita considerata è θ , nel modello del punto precedente si deve unicamente sostituire la matrice delle uscite, che adesso è

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

Di conseguenza, la f.d.t. nel caso $K_1 = K_2 = 10$ diventa

$$G_{\theta,10}(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{-11.772}{(s + 5.07)(s - 2.437)(s^2 + 1.818s + 37.02)}$$

mentre nel caso $K_1 = K_2 = 1$ si ha

$$G_{\theta,1}(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{-11.772}{(s + 5.598)(s - 2.857)(s^2 + 1.709s + 35.36)}$$

La discussione della stabilità ovviamente è invariata rispetto al punto precedente.

- D)** La differenza tra i modelli dei punti precedenti corrispondenti a considerare uscite diverse per lo stesso sistema, consiste unicamente nella presenza o meno di zeri nella funzione di trasferimento. Il fatto che i poli siano invariati è ovvia conseguenza del fatto che gli autovalori della matrice dinamica, e quindi i modi propri del sistema, sono proprietà intrinseche, non alterate dalla scelta di ingressi o uscite.

La presenza di due zeri nelle f.d.t. che riguardano l'uscita x fa in modo che il grado relativo sia due, mentre per l'uscita θ il grado relativo è 4. Questo indica una maggiore rapidità della azione dell'ingresso f sulla variabile x rispetto a θ , effetto peraltro evidente dalla fisica del problema.

- E)** Nel caso di $G_{\theta,10}$, la presenza di un polo a parte reale positiva rende il sistema instabile a ciclo aperto. Prima di procedere al progetto di un controllore per soddisfare le specifiche richieste, è opportuno procedere ad una stabilizzazione del sistema. Il sistema di controllo sfrutterà un doppio anello di retroazione secondo lo schema riportato in 2.

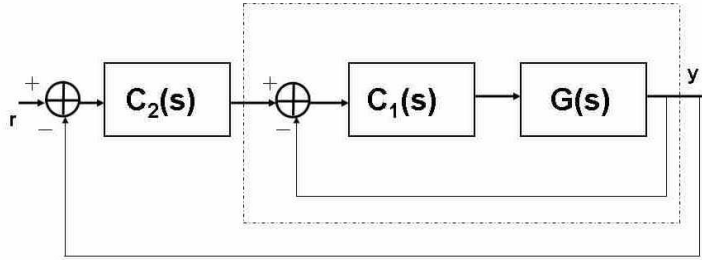


Figure 2: Schema di controllo con doppio anello di retroazione

Dal luogo delle radici riportato in figura 6 si nota che per stabilizzare il sistema è sufficiente un controllore proporzionale $C_1(s) = K_1$ con guadagno pari a $K_1 = -45$ (il segno negativo è legato al segno negativo di $G_{\theta,10}(0)$ e permette di tornare al luogo diretto).

A questo punto la nuova funzione di trasferimento relativa all'anello interno sarà data da

$$G_1(s) = \frac{K_1 G(s)}{1 + K_1 G(s)}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$G_1(s) = \frac{588.6}{(s^2 + 3.534s + 6.735)(s^2 + 0.9162s + 19.48)}$$

Avendo stabilizzato il sistema è ora possibile usare i diagrammi di Bode per il progetto del controllore.

La specifica statica sull'errore di regime è soddisfatta scegliendo un valore di guadagno statico del controllore K_c tale per cui valga $1/|1 + K_c G_{\theta,10}(0)| \leq 0.01$, da cui, essendo $|G_{\theta,10}(0)| = 7.3246$, possiamo scegliere ad esempio $|K_c| = 15$.

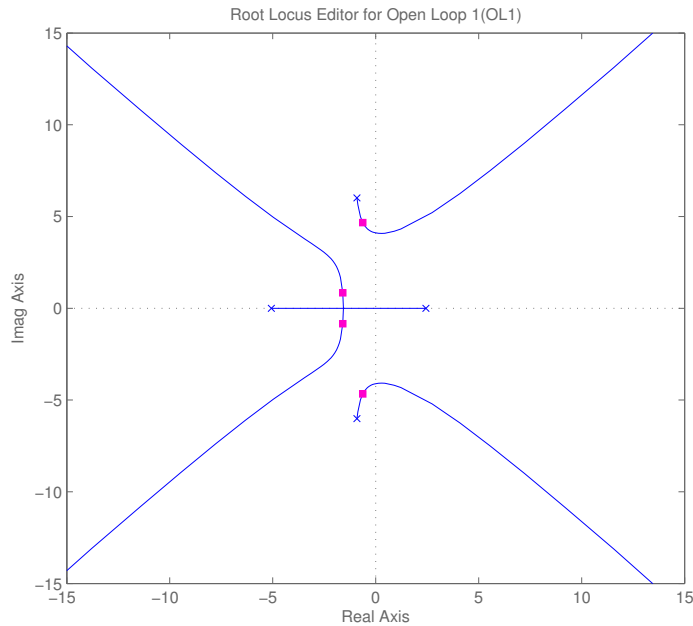


Figure 3: Luogo delle radici del sistema di partenza con controllore $C_{b,1}(s) = -23$

La specifica di non superare $\pi/9$ si traduce in una richiesta di sovralongazione inferiore a $S \leq \frac{\pi/9 - \pi/10}{\pi/10} = 1/9 \approx 0.11$. Questa specifica può essere assolta con un controllore che renda il sistema in anello chiuso approssimabile con un sistema a due poli dominanti con smorzamento $\delta \approx 0.6$, il che significa chiedere un margine di fase di circa 60 gradi.

La specifica sul tempo di assestamento al 5% indica invece la necessità di avere una banda passante $\omega_T \geq \frac{3}{\delta T_a} = 50$ rad/s.

Un controllore che soddisfa queste specifiche può essere ottenuto utilizzando due azioni anticipatrici con una coppia di zeri complessi coniugati posti vicino alla coppia di poli più veloci del sistema inserendo i poli necessari alla causalità a pulsazioni superiori, ovvero

$$C_a(s) = 4.27e13 \frac{(s + 31.25)^2 (s + 12.75)^2}{(s + 1000)(s + 1030)(s^2 + 7.316 \cdot 10^4 s + 6.22 \cdot 10^9)}$$

Il sistema risulta avere pulsazione di taglio $\omega_T = 1620$ rad/s e margine di fase $M_f = 60.2$ gradi. La risposta al gradino riportata in fig. 4 risulta soddisfare le specifiche.

Il codice di una funzione che simuli la dinamica discretizzata del controllore, ad esempio implementato come una Matlab function, è riportato di seguito.

```
function out = controllore(in)
% definizione del controllore
s = tf('s');
C = -1.1e9*(s+8.953)*(s^2 + 9.083*s + 206.6)/(s+1000)^3;
% controllore in spazio di stato
C_ss = ss(C);

% errore (in ingresso al controllore)
e = in(1);
% stato del controllore
x = in(2:end);
```

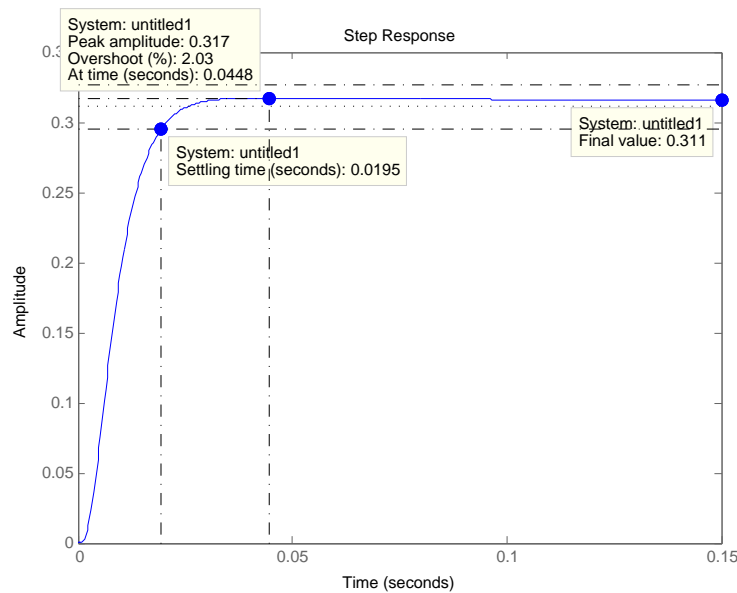


Figure 4: Risposta al gradino del sistema $G_{\theta,10}$ con il controllore $C_a(s)$

```
% campionamento: almeno 5-10 volte piu' veloce degli autovalori
% piu' veloci del controllore - controllando che questo rimanga stabile
Ts = 0.0005;
```

```
% matrici discretizzate
Ad = C_ss.a*Ts + eye(size(C_ss.a));
Bd = C_ss.b*Ts;
Cd = C_ss.c;
Dd = C_ss.d;

% controllo del sistema (uscita del controllore)
u = Cd*x + Dd*e;
% nuovo stato
x = Ad*x + Bd*e;

out = [u; x];
```

Esso può essere utilizzato per simulare il sistema con controllore chiuso in retroazione con uno schema Simulink come quello di fig. 5. Da notare in particolare il blocco `memory`, necessario per mantenere traccia dello stato del controllore, ed il fatto che il blocco `Matlab-function` collegato al codice presentato ha un campionamento pari a quello del controllore stesso, ovvero 0.0005 s.

F) Anche nel caso di $G_{\theta,1}$ è opportuno procedere ad una stabilizzazione del sistema.

Dal luogo delle radici riportato in figura 6 si nota che per stabilizzare il sistema è sufficiente un controllore proporzionale $C_1(s) = K_1$ con guadagno pari a $K_1 = -23$ (il segno negativo è legato al segno negativo di $G_{\theta,1}(0)$ e permette di tornare al luogo diretto).

A questo punto la nuova funzione di trasferimento relativa all'anello interno sarà data da

$$G_1(s) = \frac{K_1 G(s)}{1 + K_1 G(s)}.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$G_1(s) = \frac{588.6}{(s + 3.123)(s + 0.3797)(s^2 + 0.9468s + 19.55)}$$

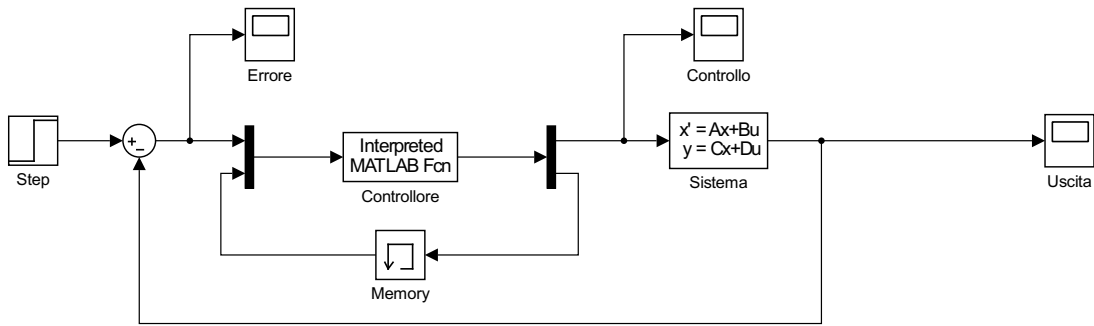


Figure 5: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta del sistema in ciclo chiuso con il controllore discretizzato.

Si noti che avendo stabilizzato il sistema è ora possibile usare i diagrammi di Bode per il progetto del controllore.

Le specifiche sul piano di Bode sono già state discusse al punto precedente.

Sulla base dello schema riportato in figura 2, sia $C_2(s)$ il controllore dell'anello più esterno. Applicando il teorema del valor finale, per rispettare la specifica si deve imporre che

$$\frac{1}{1 + C_2(0)G_1(0)} < 0.01$$

da cui si deduce che il guadagno statico di $C_2(s)$ deve risultare

$$C_2(0) > \frac{1}{G_1(0)} \frac{(1 - 0.01)}{0.01}$$

Essendo $G_1(0) \simeq 25.3889$ deve essere $C_2(0) > 4$

Il progetto di questo secondo controllore ripercorre da vicino il procedimento utilizzato in precedenza per controllare $G_{\theta,10}$, con tre zeri e tre poli in alta frequenza. Un controllore della forma

$$C_{b,2}(s) = 2.76e13 \frac{(s + 13.9)^2 (s + 123.3)^2}{(s + 10^4)^4}$$

ottiene il rispetto delle specifiche sul piano di Bode, come mostrato in fig. 7.

La risposta al gradino in anello chiuso è riportata in figura 8. Si noti come la specifica sulla sovralongazione massima e sul tempo di assestamento siano rispettate.

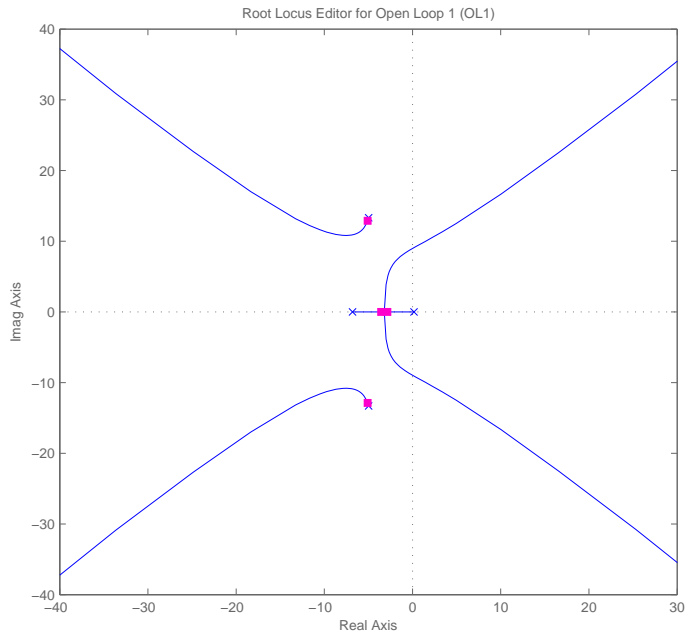


Figure 6: Luogo delle radici del sistema di partenza con controllore $C_{b,1}(s) = -23$

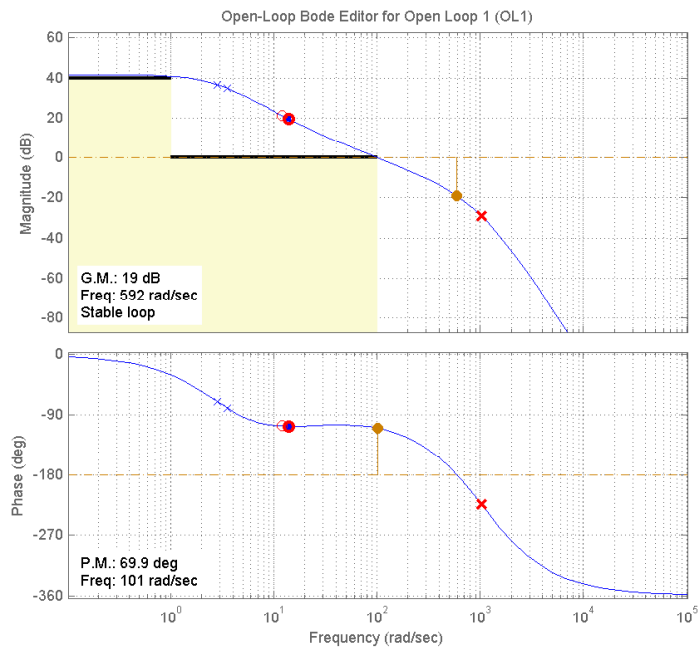


Figure 7: Diagramma di Bode del sistema controllato con $C_{b,2}(s)$.

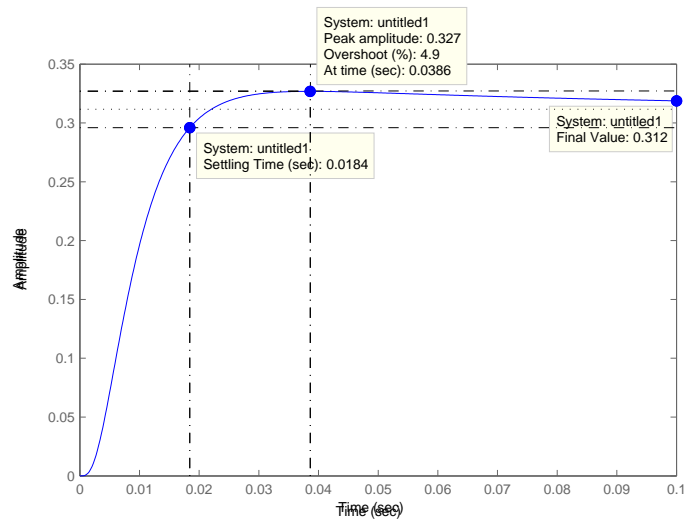


Figure 8: Risposta al gradino di ampiezza $\pi/10$. Si noti come la specifica sulla sovraelongazione massima e sul tempo di assestamento siano rispettate.