

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

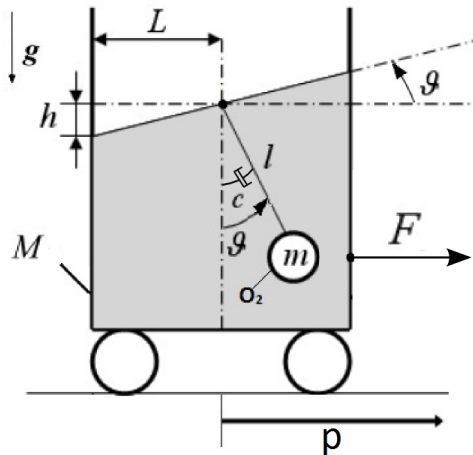


Figura 1: Schema di un carrello che trasporta materiale fuso (ispirato da elaborato di L. Brasile)

Il sistema di Fig.1 è costituito da un carrello di massa  $M$  che trasporta del materiale fuso. Il moto di oscillazione del metallo fuso all'interno del carrello viene modellato utilizzando un pendolo con smorzamento  $c$ , di lunghezza  $l$ , alla cui estremità è posizionata una massa  $m$ . La grandezza  $h$  indica l'altezza del livello della superficie del fluido rispetto all'altezza del fluido stesso da fermo, mentre  $F$  è la forza di controllo applicata alla motrice. In posizione  $p = p_M$  è presente un ostacolo, verso il quale ci si deve muovere senza arrivare a contatto.

Le equazioni che regolano la dinamica del sistema sono:

$$\begin{cases} \ddot{p} = \frac{F + mg \sin(\theta) \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} + \frac{1}{l} \frac{c \dot{\theta} \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} + \frac{m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} \\ \ddot{\theta} = -\frac{c \dot{\theta}}{m l^2} \frac{(m + M)}{(M + m \sin^2(\theta))} - \frac{F \cos(\theta) + (m + M)g \sin(\theta)}{l (M + m \sin^2(\theta))} - \frac{m \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} \end{cases}$$

Durante la movimentazione del carrello è d'interesse monitorare anche il comportamento del contenuto, verificando che questo non fuoriesca dal carrello stesso. Per fare ciò, nel sistema sono disponibili sia sensori per la misura di  $p$  che di  $h$  (pari a  $L \tan(\theta)$ ).

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

**A.1** Si trovi l'equilibrio del sistema in cui il carrello sia fermo nella generica posizione  $\bar{p}$ .

**A.2** Si riporti simbolicamente il sistema in forma di stato linearizzato attorno al punto di equilibrio trovato precedentemente.

**A.3** Considerando i seguenti valori numerici

$$p_M = 11 \text{ m}; \quad \bar{p} = 5 \text{ m}; \quad M = 6 \text{ t}; \quad m = 10 \text{ t}; \quad l = 0.4 \text{ m}; \quad c = 0.07 \text{ N m s}; \quad L = 0.5 \text{ m}$$

e supponendo di avere accesso alle uscite di misura  $y_1 = p$  e  $y_2 = h$ , si determinino le seguenti funzioni di trasferimento:

- tra la forza  $F$  e  $p$
- tra la forza  $F$  e  $h$

discutendone la stabilità e fornendone un'interpretazione fisica. Si riporti inoltre lo schema a blocchi del sistema.

**A.4** Si sintetizzi un controllore per la forza  $F$  tale da:

- portare il carrello alla posizione di 10 m con un errore non superiore a 5 cm, entrando e rimanendo in un intervallo di  $\pm 25$  cm rispetto al valore di regime in un tempo inferiore ai 30 sec ed evitando di interferire con l'ostacolo;

- attenuare gli effetti di un rumore di misura  $n(t)$  affinché le oscillazioni della posizione del carrello a regime non superino i 2 cm. Si supponga che il rumore  $n(t)$  abbia componenti nel campo delle frequenze tra  $1\text{ Hz}$  e  $100\text{ Hz}$  e potenza variabile in questo spettro, approssimato con  $n(t) = \sum_{i=1}^3 N_i \sin(\omega_i t)$  con  $N_1 = 0.06$ ,  $N_2 = 0.03$ ,  $N_3 = 0.02$ , e  $\omega_1 = 2\pi$ ,  $\omega_2 = 20\pi$ ,  $\omega_3 = 200\pi$ .

Si riportino quindi

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode;
- il procedimento di progetto del controllore che si intende seguire illustrato con diagrammi a blocchi;
- il controllore progettato;
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto, mostrando il raggiungimento delle specifiche;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.

**A.5** Si effettui una simulazione in ambiente Simulink della risposta al gradino (senza dunque considerare il disturbo) del sistema controllato tramite il controllore progettato al punto **A.4**. Si riportino dunque

- lo schema Simulink utilizzato per la simulazione
- gli andamenti della variabili  $p$  e  $h$  così ottenuti

**A.6** Si effettui una seconda simulazione in ambiente Simulink, utilizzando il seguente segnale in ingresso al sistema controllato

$$r(t) = \begin{cases} 0.2t & t \in [0 \div 25] \text{ s} \\ 5 & t \geq 25 \text{ s} \end{cases}$$

Si riportino gli andamenti della variabili  $p$  e  $h$  così ottenuti, discutendo le differenze riscontrate con i risultati del punto **A.5**, con particolare riferimento alla potenziale uscita del fluido.

## Soluzione

**A.1** Definendo  $x = [p \ \theta \ \dot{p} \ \dot{\theta}]^T$  come vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio,  $\dot{p} = 0, \dot{\theta} = 0, \ddot{p} = 0, \ddot{\theta} = 0, \dot{F} = 0$  e  $p = \bar{p}$  si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = \frac{F + mg \sin(\theta) \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} + \frac{1}{l} \frac{c \dot{\theta} \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} + \frac{m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} \\ 0 = -\frac{c \dot{\theta}}{m l^2} \frac{(m + M)}{(M + m \sin^2(\theta))} - \frac{F \cos(\theta) + (m + M)g \sin(\theta)}{l (M + m \sin^2(\theta))} - \frac{m \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} \end{cases} \quad (1)$$

da cui si ottiene l'equilibrio

$$\begin{cases} \bar{F} = -m g \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \\ \bar{\theta} = 0 \vee \bar{\theta} = \arccos \left[ \pm \sqrt{\frac{m + M}{m}} \right] \end{cases} \quad (2)$$

Ma  $\sqrt{\frac{m + M}{m}} > 1$  per tutti i valori di masse positive, quindi l'unico equilibrio accettabile è:

$$\begin{cases} \bar{F} = 0 \\ \bar{\theta} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ovvero liquido in posizione orizzontale, e forza nulla.

Si noti come  $p$  faccia parte del vettore di stato nonostante il valore di  $p$  non appaia nelle equazioni della dinamica. Questo per due motivi:

- L'equilibrio richiesto prevede una posizione costante del carrello.
- Il valore di  $p$  appare nella funzione di uscita ( $y_1 = p$ ).

**A.2** Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [p - \bar{p}, \theta, \dot{p}, \dot{\theta}]^T$ , il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{F + mg \sin(\tilde{x}_2) \cos(\tilde{x}_2)}{M + m \sin^2(\tilde{x}_2)} + \frac{1}{l} \frac{c \tilde{x}_4 \cos(\tilde{x}_2)}{M + m \sin^2(\tilde{x}_2)} + \frac{m l \tilde{x}_4^2 \sin(\tilde{x}_2)}{M + m \sin^2(\tilde{x}_2)} \\ \dot{\tilde{x}}_4 = -\frac{c \tilde{x}_4}{m l^2} \frac{(m + M)}{(M + m \sin^2(\tilde{x}_2))} - \frac{F \cos(\tilde{x}_2) + (m + M)g \sin(\tilde{x}_2)}{l (M + m \sin^2(\tilde{x}_2))} - \frac{m \tilde{x}_4^2 \sin(\tilde{x}_2) \cos(\tilde{x}_2)}{M + m \sin^2(\tilde{x}_2)} \end{cases} \quad (4)$$

Le uscite del sistema sono  $y_1 = \tilde{x}_1 + \bar{p}$  e  $y_2 = L \tan \tilde{x}_2$ . Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili  $\tilde{x}$  e  $F$ , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5)$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m}{M} g & 0 & \frac{c}{l M} \\ 0 & -\frac{m + M}{M} \frac{g}{l} & 0 & -\frac{m + M}{m M} \frac{c}{l^2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{l M} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0. \quad (7)$$

**A.3** Sostituendo i valori numerici riportati si ottengono le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16.35 & 0 & 2.9167 \cdot 10^{-05} \\ 0 & -65.4 & 0 & -1.1667 \cdot 10^{-04} \end{bmatrix}, B = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.667 \\ -4.167 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0, \quad (9)$$

Le funzioni di trasferimento tra l'ingresso  $F$  e le uscite  $y_1 = p$  e  $y_2 = h$  sono:

$$G_p = \frac{1.6667 \cdot 10^{-4} (s^2 + 4.375 \cdot 10^{-5} s + 24.52)}{s^2 (s^2 + 0.0001167 s + 65.4)} \quad (10)$$

$$G_h = \frac{-2.0833 \cdot 10^{-4}}{(s^2 + 0.0001167 s + 65.4)}. \quad (11)$$

Essendo tutti i poli del sistema a parte reale strettamente negativa  $G_h$  è asintoticamente stabile. Viceversa  $G_p$  possiede due poli nell'origine, risultando dunque polinomialmente instabile.

I due poli nell'origine in  $G_p$  rappresentano il comportamento di massa libera, che caratterizza il carrello (nessuna forza dissipativa e nessun potenziale sono associati direttamente a  $p$ ): data una forza impulsiva in ingresso il carrello a regime si muoverà di moto uniforme. Le due rimanenti coppie poli-zeri rappresentano l'effetto dell'inerzia del pendolo. Essendo il pendolo molto labilmente smorzato essi posseggono parte reale molto piccola.

In  $G_h$  due zeri nell'origine cancellano i due poli visibili in  $G_p$ . Questo è coerente con il fatto che, messo il carrello in moto uniformemente accelerato, il pendolo si debba disporre ad un angolo costante non nullo. Tale angolo avrà segno negativo, come risulta evidente dal guadagno statico di  $G_h$ .

In figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con l'ingresso di controllo  $F$  e le due uscite di misura  $y_1 = p$  e  $y_2 = h$ .

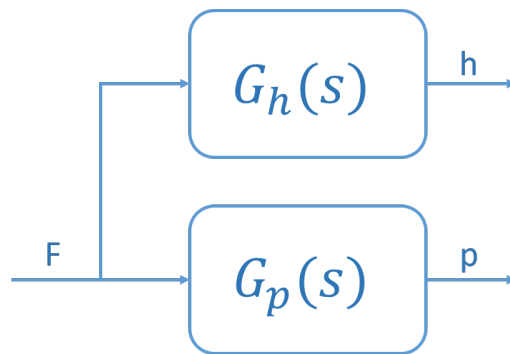


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

**A.4** Poiché il sistema che si intende controllare  $G_p$  non presenta poli a parte reale positiva, non è necessario l'utilizzo di un anello di controllo stabilizzante. A tal riguardo si ricorda che l'ipotesi del teorema di Bode richiede che il sistema non sia *esponenzialmente* instabile. È possibile quindi procedere direttamente alla sintesi di un controllore  $C(s)$  che permetta il rispetto delle specifiche utilizzando il diagramma di Bode (vedi la figura 2 per una rappresentazione a blocchi del sistema con l'ingresso di controllo  $F$  e l'uscita di misura  $y_1 = p$ , ed il montaggio di figura 3 per il sistema controllato).

A seconda delle specifiche

Il controllore, per soddisfare le specifiche, sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

Le specifiche di inseguimento del riferimento da rispettare sono:

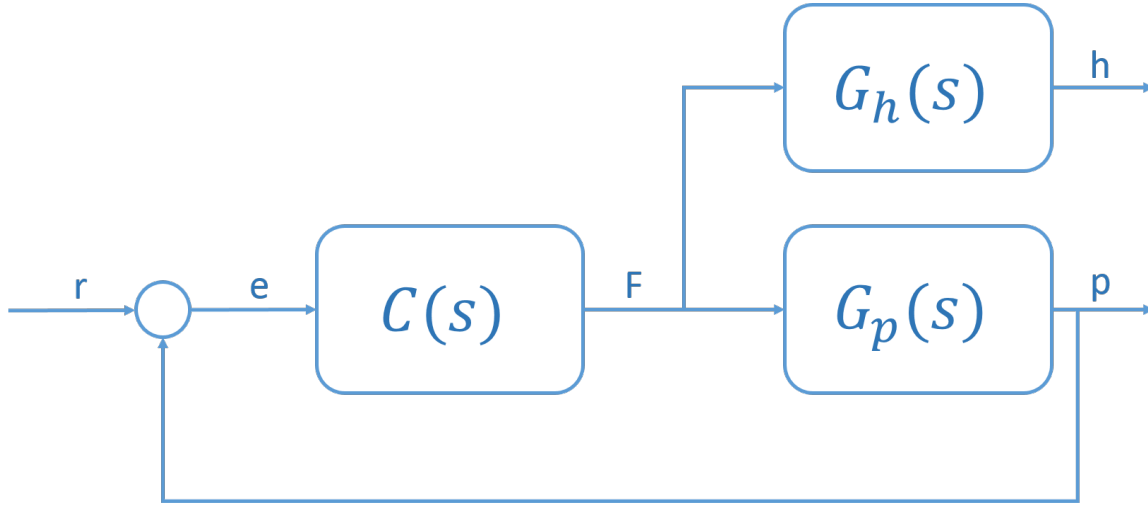


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema con controllore.

- non superare mai il valore di regime di più di un mezzo metro ( $p_M - \bar{p} - L$ ), ovvero sovraelongazione massima inferiore al 10%;
- assestamento entro un intervallo di  $\pm 25$  cm (5% essendo il gradino di 5 m) entro un tempo di 30 sec;
- errore a regime per ingresso a gradino con coefficiente 5 m limitato a 5 cm.

Si può cercare di rispettare tali specifiche con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema a due poli dominanti.

La specifica sulla sovraelongazione si impone tramite

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 10\%$$

Da cui

$$\delta > 0.5912 \quad \implies \quad M_{\phi} \simeq 100\delta = 59.12 \quad (12)$$

La specifica sull'assestamento si traduce come segue:

$$T_{a5} \simeq \frac{3}{\delta\omega_T} \quad \implies \quad \omega_T > 0.1691 \text{ rad/s.}$$

Per quanto riguarda l'errore a regime limitato esso è automaticamente ottenuto senza bisogno dell'aggiunta di ulteriori poli nell'origine, o particolari guadagni: il sistema è già di tipo 2.

**A.4.2** Si richiede che un rumore di misura del tipo  $n(t) = \sum_{i=1}^3 N_i \sin(\omega_i t)$  non produca a regime uno spostamento superiore a 2 cm.

Applichiamo dunque il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata  $D(j\omega)$  del disturbo  $n$  e la trasformata  $Y_1(j\omega)$  dell'uscita è data da

$$Y_1(j\omega) = -\frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)}D(j\omega) = \bar{G}(j\omega)D(j\omega). \quad (13)$$

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica  $\omega_k$  sarà quindi del tipo

$$y_1(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D_1(j\omega_k)| \sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (14)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui  $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$ , e considerando di aumentare il modulo  $|\bar{G}(j\omega)|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a  $0.06m + 0.03m + 0.02m = 0.11m$ .

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.02}{0.11} \quad \forall \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \quad (15)$$

Oppure piú cautelativamente:

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.02}{0.11} \quad \forall \omega \geq \omega_d, \quad (16)$$

dove  $\omega_d$  viene scelta come la frequenza minima del disturbo, ovvero  $2\pi \simeq 6.28$  rad/s.

Poiché  $\omega_d$  è di due ordini di grandezza maggiore della  $\omega_T$  è ragionevole applicare l'approssimazione  $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \approx 1$ . Il controllore quindi deve soddisfare

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \leq 0.1818. \quad \forall \omega \geq \omega_d \quad (17)$$

Il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica dovrà essere minore di  $20 \log_{10}(0.1818) \approx -14.8081$  dB per le frequenze considerate.

**A.4.3** La figura 4 mostra il diagramma di Bode di  $G(s)$  con la specifica sulla banda passante, sul margine di fase e sui guadagni in alta frequenza per attenuare i disturbi nel caso meno restrittivo, mentre in figure 5 sono riportate le corrispondenti specifiche nel caso piú restrittivo.

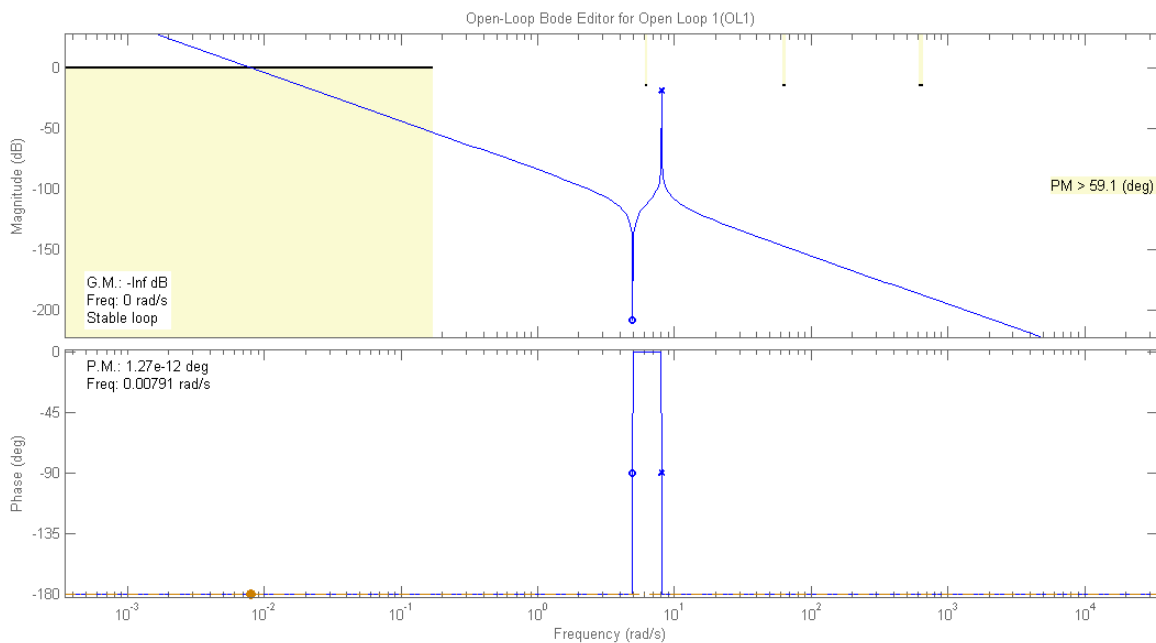


Figura 4: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche meno restrittive da rispettare.

A causa della coppia di poli e di zeri complessi poco smorzati il sistema  $G(s)$  presenta un picco ad una frequenza superiore a  $\omega_1$  che risulta difficilmente eliminabile. Nel caso si prendano in considerazione le specifiche meno restrittive esso non crea problemi. Al contrario andrà eliminato tramite una cancellazione polo-zero nel caso in cui si vogliano considerare le specifiche in maniera piú restrittiva. Questo sarà possibile solo nel caso in cui si abbia una conoscenza precisa del modello.

Infine sarà necessaria l'introduzione di coppie anticipatrici di poli e zeri al fine di aumentare banda passante e margine di fase.

Entrambe le soluzioni precedenti sono da considerarsi corrette sebbene diverse, e pertanto di seguito si riporteranno entrambe.

Un controllore risultante nel caso di cancellazione é:

$$C^c(s) = 5.6646e05 \frac{(s + 0.009591)(s^2 + 0.0001132 * s + 65.4)}{((s + 0.995)(s + 79.47))^2}. \quad (18)$$

Un controllore che non fa uso della tecnica di cancellazione é:

$$C(s) = 9.2912e06 \frac{(s + 0.1727)(s + 0.09593)(s^2 + 14.63s + 124.1)}{(s + 1.241)(s + 1.201)(s + 27.31)(s + 991.7)} \quad (19)$$

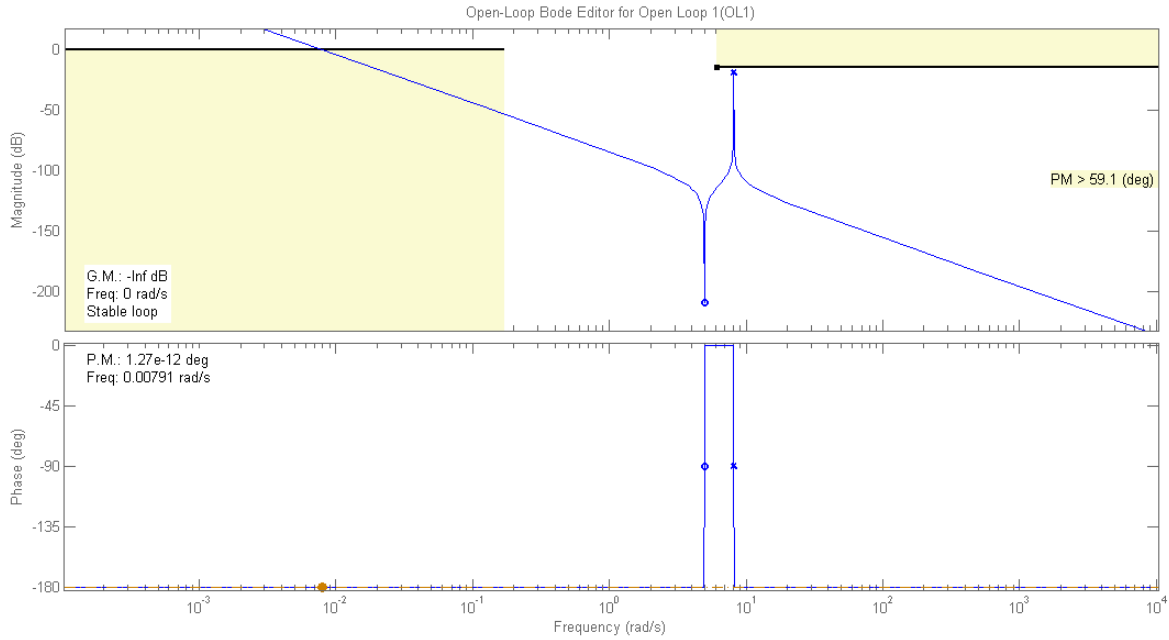


Figura 5: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche da rispettare.

Nelle figure 6 e 7 si vede come le specifiche riportate sul diagramma di Bode vengano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva é nel caso di cancellazione la seguente:

$$G_{cl}^c(s) = \frac{94.41 (s + 0.009591) (s^2 + 4.375e - 05s + 24.52) (s^2 + 0.0001132s + 65.4)}{(s + 80.57) (s + 78.36) (s + 1.517) (s + 0.009848) (s^2 + 0.4786s + 0.2354) (s^2 + 0.0001167s + 65.4)} \quad (20)$$

Mentre nel caso senza cancellazione é:

$$G_{cl}(s) = \frac{1548.5 (s + 0.09593) (s + 0.1727)(s^2 + 4.375e - 05s + 24.53) (s^2 + 14.63s + 124.1)}{(s + 990.1) (s + 28.37) (s^2 + 0.1842s + 0.01178)(s^2 + 2.298s + 3.501) (s^2 + 0.4897s + 67.39)} \quad (21)$$

In figura 8 e 9 sono mostrate le risposte al gradino del ciclo chiuso, con le grandezze significative.

**A.5** In figura 10 è possibile osservare lo schema Simulink necessario a simulare la risposta al gradino del sistema. Nelle figure 11 e 12 si riportano le risposte ottenute per l'uscita  $h$  nei due casi. Le risposte di  $p$  sono omesse per brevità in quanto identiche a quelle ottenute al passo precedente.

**A.6** In figura 13 è possibile osservare lo schema Simulink necessario a simulare la risposta al segnale richiesto. Il blocco *Ramp* permette di generare un segnale a rampa, di cui si può scegliere la pendenza agendo sul parametro *slope*. Il blocco *Saturation* invece permette di imporre il valore massimo raggiungibile dalla rampa, agendo sul parametro *Upper limit*.

Nelle figure 14 e 15 si riportano le risposte ottenute nel caso di utilizzo della cancellazione polo-zero, e nelle figure 16 e 17 si riportano le risposte ottenute senza cancellazione.

Si può osservare come il valore massimo raggiunto dall'altezza del fluido sia sensibilmente minore rispetto ai risultati ottenuti nel punto precedente. Questo è dovuto al fatto che stiamo chiedendo al sistema di muoversi in maniera uniforme fino ad una posizione finale (rampa saturata), invece di chiedergli di raggiungere tale posizione istantaneamente (gradino). Con un riferimento a rampa i segnali di controllo generati risultano più contenuti, eccitando in maniera minore la dinamica del fluido nel carrello. In questo caso la simulazione in ambiente Simulink si rivela essere un ottimo strumento per valutare a posteriori il rispetto di vincoli non imposti esplicitamente in fase di design del controllore, come il fatto che  $h$  non debba superare l'altezza del serbatoio.

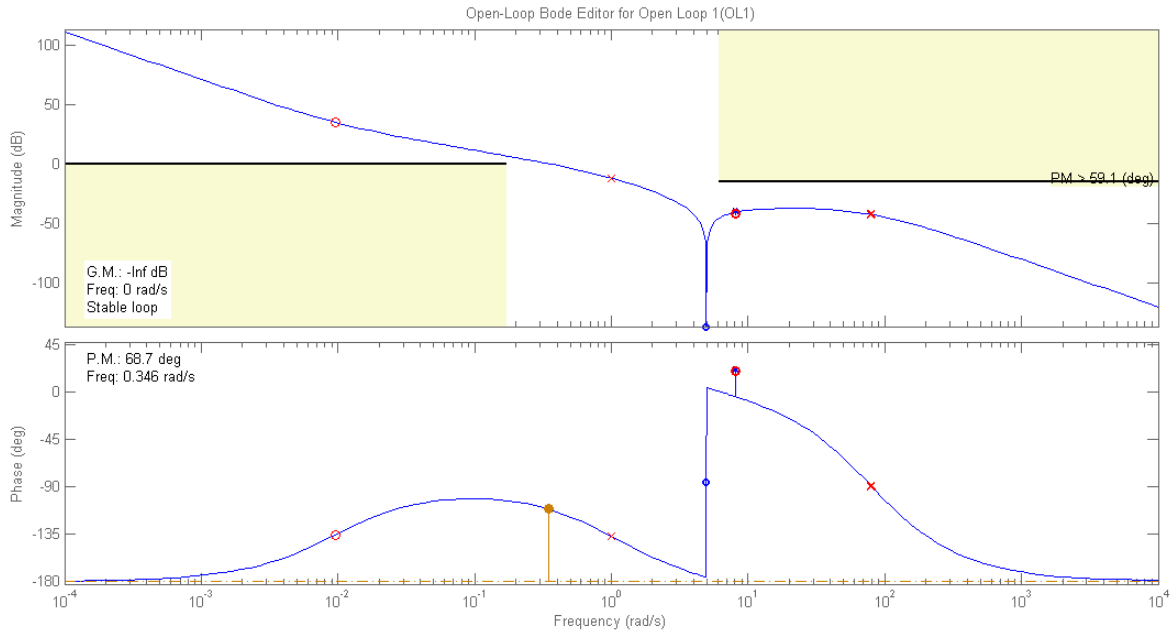


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C^c(s)G(s)$  con il rispetto delle specifiche di progetto, con cancellazione.

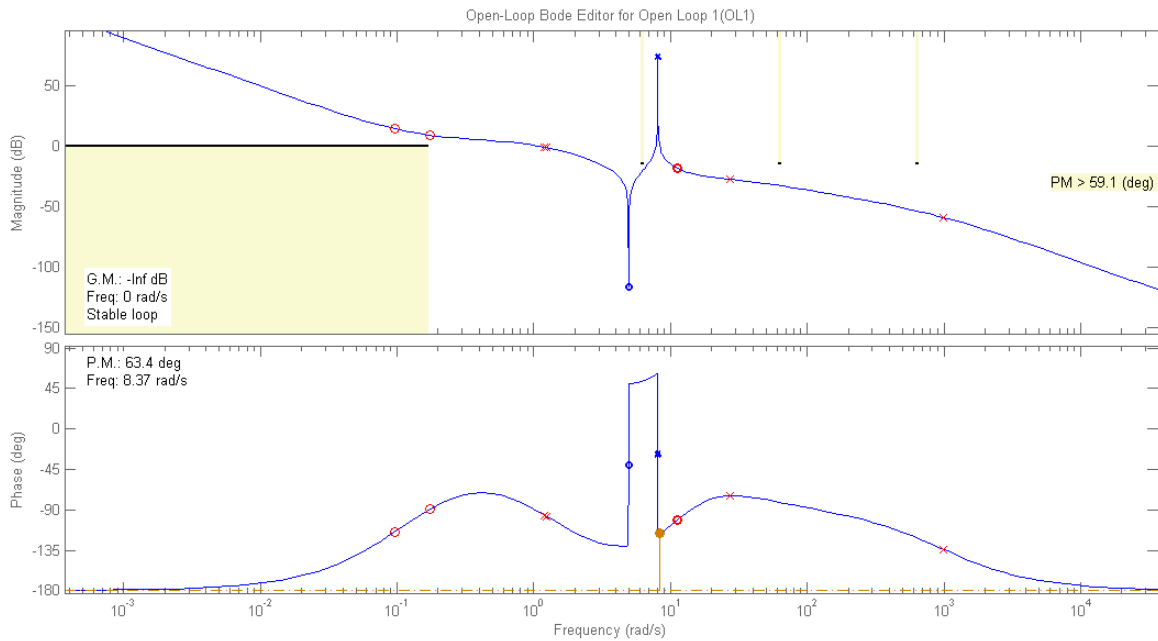


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con il rispetto delle specifiche di progetto, senza cancellazione.



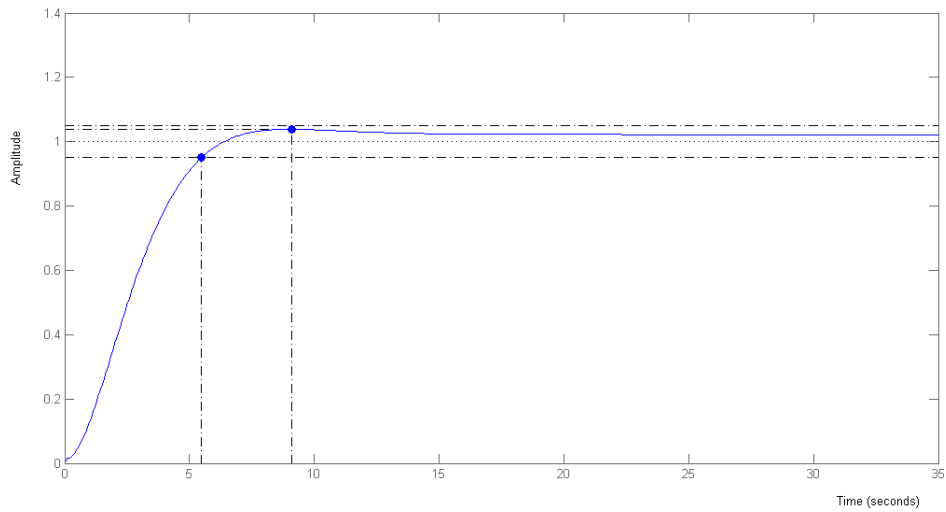


Figura 8: Risposta al gradino di  $p$  nel caso di cancellazione con quantità notevoli indicate.

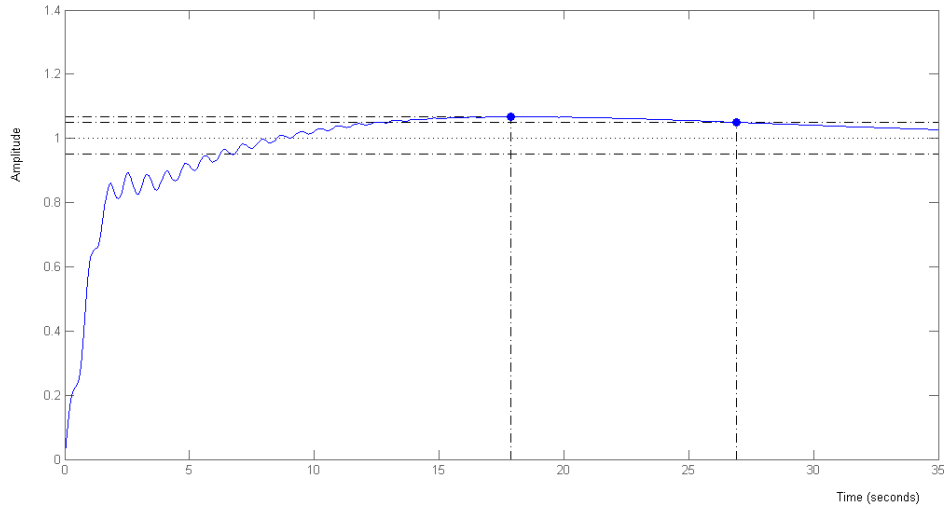


Figura 9: Risposta al gradino di  $p$  nel caso in cui non si usi la cancellazione con quantità notevoli indicate.

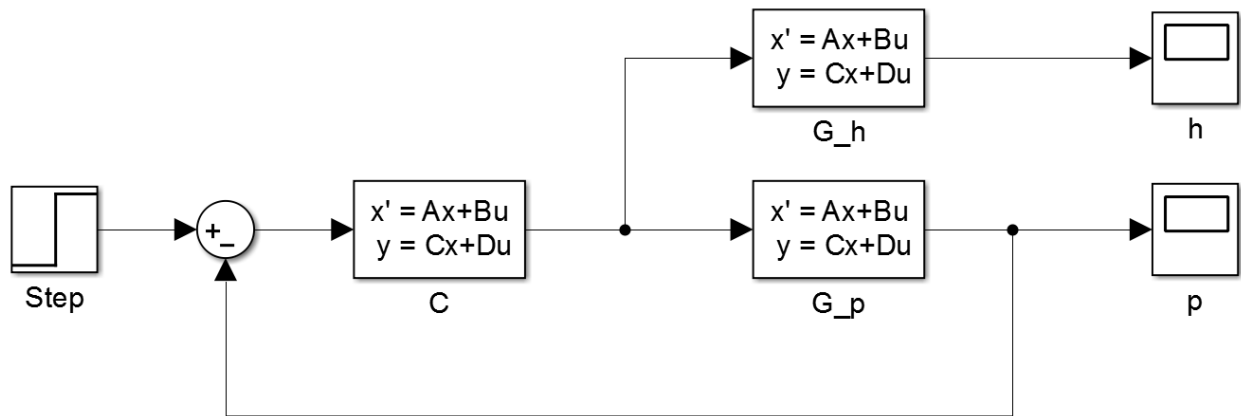


Figura 10: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso.

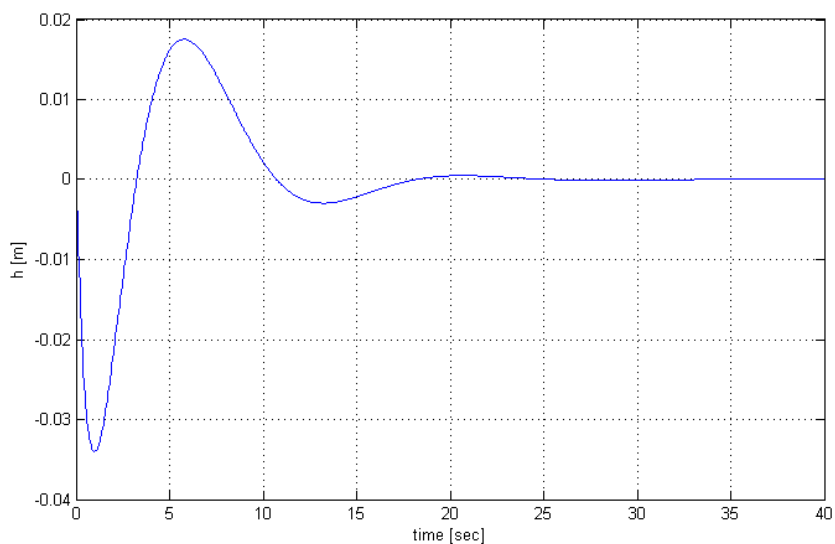


Figura 11: Risposta al gradino di  $h$  nel caso di cancellazione.

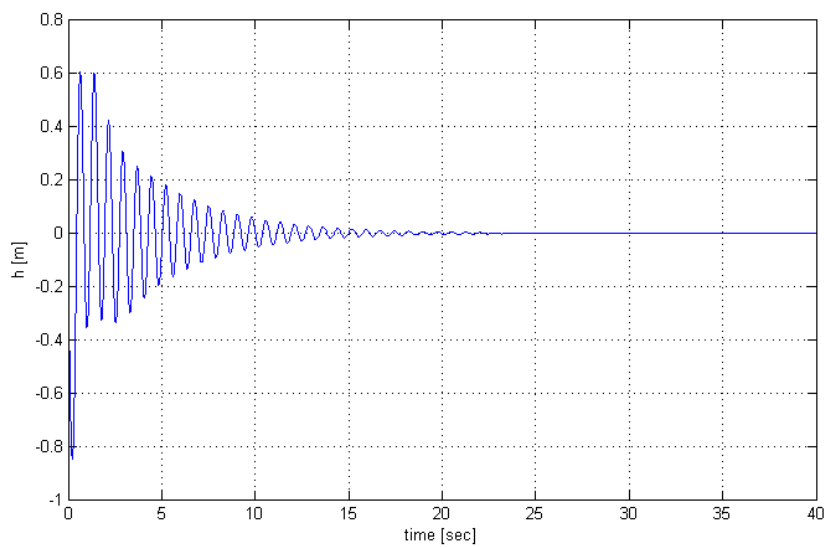


Figura 12: Risposta al gradino di  $h$  nel caso in cui non si usi la cancellazione.

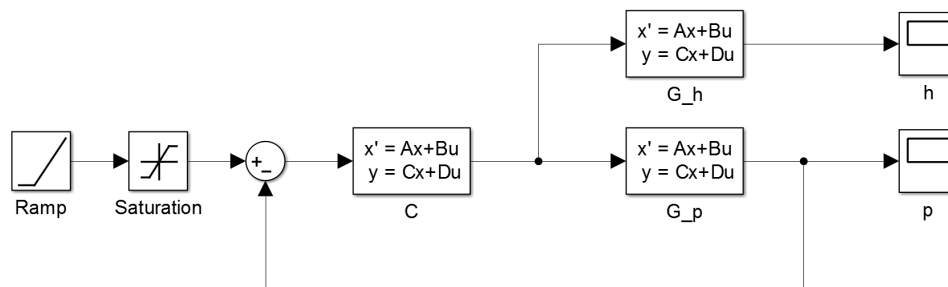


Figura 13: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta alla rampa del sistema in ciclo chiuso.

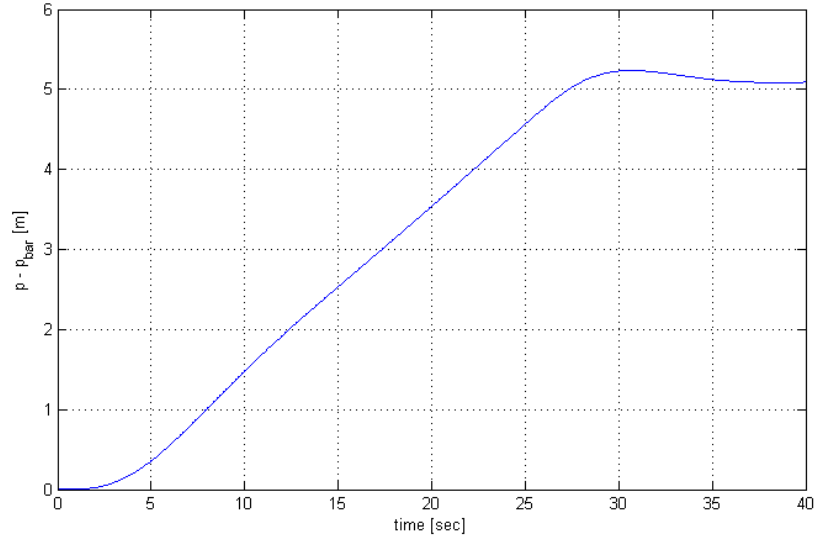


Figura 14: Risposta alla rampa di  $p$  nel caso in cui si faccia uso della cancellazione.

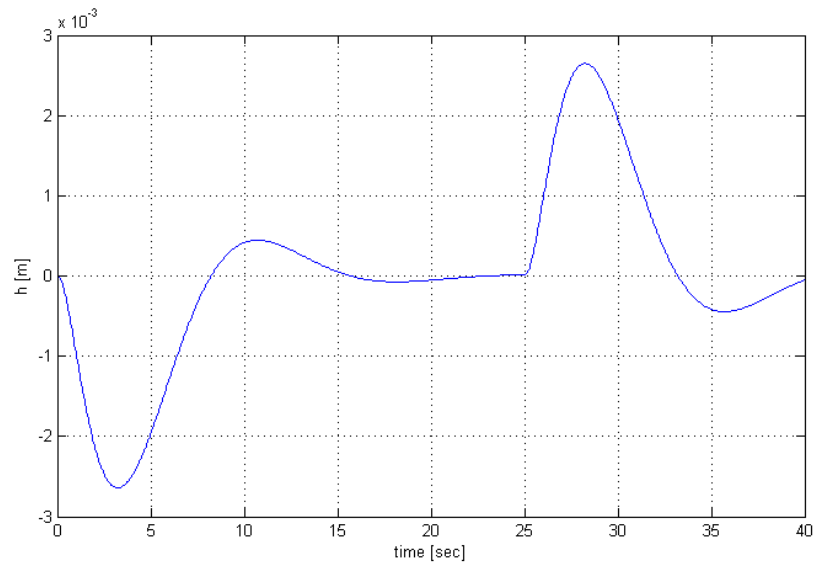


Figura 15: Risposta alla rampa di  $h$  nel caso in cui si faccia uso della cancellazione.

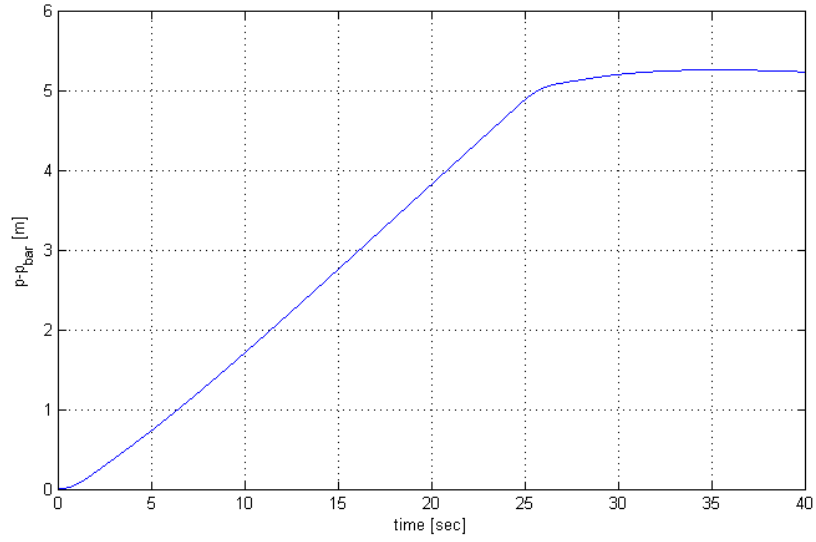


Figura 16: Risposta alla rampa di  $p$  nel caso in cui non si faccia uso della cancellazione.

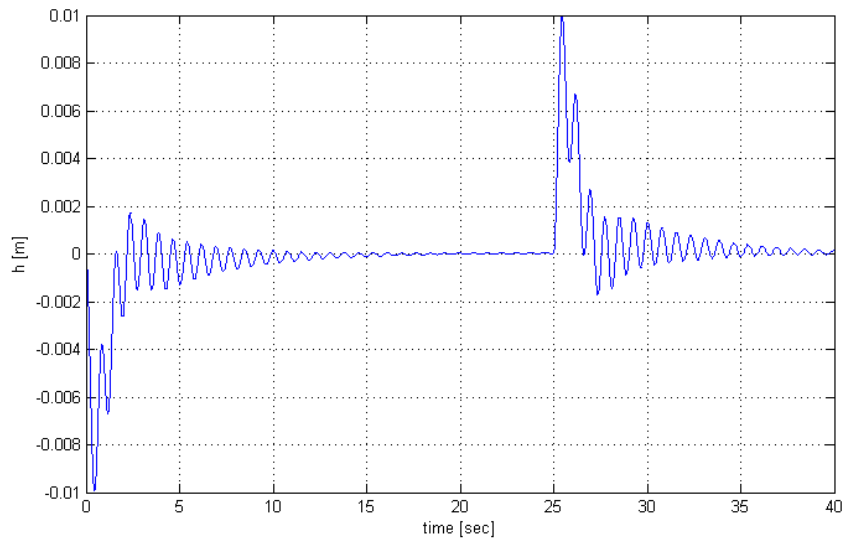


Figura 17: Risposta alla rampa di  $h$  nel caso in cui non si faccia uso della cancellazione.