

Le moto categoria MotoGP sono caratterizzate da coppie talmente elevate che possono portare al sollevamento della ruota anteriore in qualsiasi marcia. Se la ruota anteriore si solleva troppo o troppo rapidamente, il pilota è costretto a “chiudere il gas” riducendo drasticamente quindi l’accelerazione. Le moto sono quindi dotate di un sistema di controllo di anti impennata (anti-wheelie - AW) che interviene in maniera automatica riducendo la coppia di trazione opportunamente penalizzando il meno possibile le prestazioni: quando un sistema AW è ben calibrato riduce la coppia a sufficienza per evitare brusche impennate senza compromettere troppo l’accelerazione. In figura è riportata un’immagine di gara di MotoGP che ritrae un noto pilota in sella alla sua moto con sistema AW in funzione. Sulla destra è riportato uno schema molto semplificato dei principali fenomeni coinvolti. La dinamica del sistema può essere descritta, in maniera molto semplificata, attraverso le seguenti equazioni del moto:

$$m\ddot{x} = \frac{\tau}{R} - F_d - \frac{1}{2}k(1 + \sin\theta)\dot{x}^2$$

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mg\frac{L}{2}\cos\theta = \tau + F_d\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}k(1 + \sin\theta)\dot{x}^2\frac{L}{2}\sin\theta$$

dove m è la massa del veicolo, I il momento del veicolo rispetto all’asse della ruota posteriore, R il raggio delle ruote, L l’interasse, k coefficiente che modella la resistenza all’avanzamento longitudinale e b coefficiente che modella un termine dissipativo lineare. τ è la coppia alla ruota della moto, F_d è una forza di disturbo agente in direzione longitudinale. \dot{x} è la velocità longitudinale della moto, θ è l’angolo di beccheggio della moto.

- 1 Si determinino tutte le condizioni di equilibrio del sistema, sotto la condizione $\dot{x} \geq 0$ di validità per le equazioni proposte, in funzione del generico angolo costante $\theta = \bar{\theta}$, considerando nullo il disturbo F_d .
- 2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla generica configurazione di equilibrio individuata al punto 1 tale che $\dot{x} > 0$, assumendo di poter misurare la distanza $h = L \sin \theta$ dal suolo della ruota anteriore.
- 3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello: $\bar{\theta} = 10 \text{ deg}$, $m = 160 \text{ kg}$, $I = 235.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $R = 0.6 \text{ m}$, $b = 0.2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$, $L = 2.1 \text{ m}$, $k = 40.248 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$, $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
 - Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
 - si ricavano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo τ e di disturbo F_d) e l’uscita h ;
 - si discuta circa la stabilità del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$G(s) = 0.0088 \frac{(s + 3.6)}{(s - 3.3)(s + 3.9)(s + 2.2)}$$

$$G_d(s) = 0.0016 \frac{s}{(s - 3.3)(s + 3.9)(s + 2.2)}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sull'ingresso τ , e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio, rispetti le seguenti specifiche:

- Si desidera che sia in grado di portare esattamente il centro della ruota anteriore ad una distanza dal suolo $h = 1.3647\text{ m}$ senza mai superarla. Si desidera inoltre che, trascorsi 0.3 s , la distanza h entri, senza più uscirne, nell'intervallo $[1.3147, 1.4147]\text{ m}$.
- Si desidera reiettare completamente una forza di disturbo costante $F_d(t) = 1\text{ N}$, mentre si desidera attenuare una forza di disturbo $F_d(t) = \sin(\omega_d t)$ [N] con $\omega_d < 0.1\text{ rad/s}$ affinché le oscillazioni indotte sulla quota h siano caratterizzate da un'ampiezza minore di 10^{-8} m .
- In presenza di un rumore di misura caratterizzato da pulsazioni $\omega_\nu > 1000\text{ rad/s}$, si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore allo 0.1% del rumore stesso.

Si riportino quindi, giustificando opportunamente tutti i passaggi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola.i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

La valutazione dell'esame è basata su quanto scritto sui fogli consegnati. OGNI passaggio ed ogni scelta di progettazione devono essere opportunamente giustificati su questi.

Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative

- 1 Gli equilibri del sistema si ottengono imponendo $\theta = \bar{\theta}$ costante e quindi $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ oltre a $\ddot{x} = 0$ e $F_d = 0$. La soluzione associata a $\ddot{x} = 0$ implica:

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= 0 \\ \bar{\theta} &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Nel caso generico di $\bar{x} > 0$ si ottiene invece il sistema seguente:

$$\begin{aligned}\bar{x}^2 &= \frac{2\bar{\tau}}{Rk(1 + \sin \bar{\theta})} \\ \bar{\tau} &= mg\frac{L}{2} \cos \bar{\theta} - \frac{L}{4}\bar{x}^2 k(1 + \sin \bar{\theta}) \sin \bar{\theta}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di secondo grado nelle variabili incognite \bar{x} e $\bar{\tau}$ si ottiene come unica espressione compatibile con la condizione $\dot{x} \geq 0$:

$$1) \quad \bar{x}_1 = \sqrt{\frac{2mgL \cos \bar{\theta}}{k(1 + \sin \bar{\theta})(2R + L \sin \bar{\theta})}} \quad \bar{\tau}_1 = \frac{RmgL \cos \bar{\theta}}{2R + L \sin \bar{\theta}}$$

- 2 Indicando con q il vettore di stato del sistema, vale a dire $q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T := [\dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$, e con $u := [\tau \quad F_d]^T$ il vettore degli ingressi, la dinamica del sistema non lineare espressa in forma di stato risulta:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{1}{m} \left(\frac{\tau}{R} - F_d - \frac{1}{2}k(1 + \sin q_2) q_1^2 \right) \\ \dot{q}_2 &= q_3 \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{I} \left(\tau + F_d \frac{L}{2} \sin q_2 + \frac{L}{4} q_1^2 k(1 + \sin q_2) \sin q_2 - bq_3 - mg\frac{L}{2} \cos q_2 \right)\end{aligned}$$

$$h = L \sin q_2$$

Definendo le nuove variabili $\tilde{q} := q - \bar{q}$, $\tilde{u} := u - \bar{u}$ e $\tilde{h} := h - \bar{h}$, una approssimazione al primo ordine (lineare) del sistema dato risulta:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} &= A\tilde{q} + B\tilde{u} \\ \tilde{h} &= C\tilde{q} + D\tilde{u} \end{cases}$$

con $A = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}, u=\bar{u}}$, $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{q=\bar{q}, u=\bar{u}}$, $C = \left. \frac{\partial h}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}, u=\bar{u}}$, $D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{q=\bar{q}, u=\bar{u}}$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{q}_1 k(1 + \sin \bar{q}_2)}{m} & -\frac{\bar{q}_1^2 k \cos \bar{q}_2}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\bar{q}_1 k L \sin \bar{q}_2 (1 + \sin \bar{q}_2)}{2I} & \frac{\frac{F_d L \cos \bar{q}_2}{2} + \frac{L g m \sin \bar{q}_2}{2} + \frac{\bar{q}_1^2 k L \cos \bar{q}_2 \sin \bar{q}_2}{4} + \frac{\bar{q}_1^2 k L \cos \bar{q}_2 (1 + \sin \bar{q}_2)}{4}}{I} & -\frac{b}{I} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{mR} & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{I} & \frac{L \sin \bar{q}_2}{2I} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad L \cos \bar{q}_2 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

- 3 Sostituendo i valori numerici per le variabili coinvolte, si ottengono le seguenti espressioni (con le opportune unità di misura):

$$A = \begin{bmatrix} -2.7670 & -10.8801 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.3432 & 11.6873 & -0.0009 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0104 & -0.0063 \\ 0 & 0 \\ 0.0043 & 0.0008 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 2.0681 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

$$\bar{x} = 9.372 \quad m/s$$

$$\bar{\tau} = 1.245 \cdot 10^3 \quad Nm$$

Indicando con B_τ e D_τ la prima colonna delle matrici B e D , corrispondenti all'ingresso τ , e con B_d e D_d la seconda colonna, corrispondenti all'ingresso di disturbo F_d , le funzioni di trasferimento cercate si possono ottenere calcolando:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_\tau + D_\tau = 0.0087929 \frac{(s + 3.608)}{(s - 3.327)(s + 3.879)(s + 2.216)}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d + D_d = 0.0016032 \frac{s}{(s - 3.327)(s + 3.879)(s + 2.216)}$$

La funzione di trasferimento del sistema presenta 1 polo a parte reale positiva. Questo permette di concludere che il sistema è instabile.

- 4 Per quanto riguarda il controllore è opportuno procedere alla progettazione di un sistema in cascata con doppio anello di retroazione - l'anello interno con il solo scopo di stabilizzare il sistema, l'anello esterno con lo scopo di soddisfare le specifiche richieste.

Si procede alla progettazione lavorando sul luogo delle radici; la forma del luogo ottenuto dalla funzione di trasferimento del sistema è riportato in figura 1

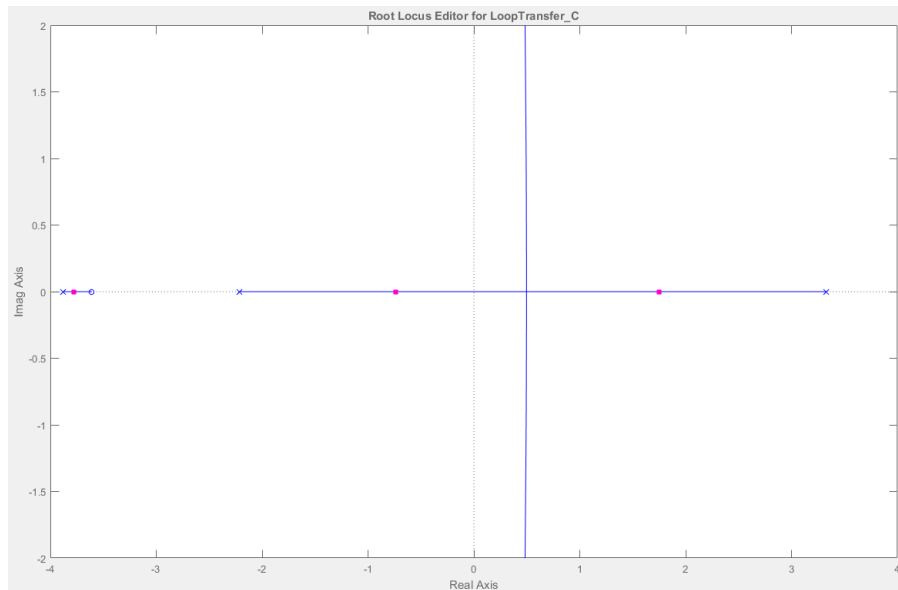


Figura 1: rlocus(G)

Un possibile approccio (quello più immediato) per la progettazione di un controllore stabilizzante è basato sull'inserimento di una rete anticipatrice e su un tuning opportuno del valore di guadagno per assicurare che i poli del sistema in anello chiuso appartengano al semipiano di asintotica stabilità. Un esempio (zero in $s = -2.927$, polo in $s = -76.63$) è quello riportato in figura 2 (dettaglio in figura 3)

Il controllore risultante ha quindi la seguente espressione:

$$C_1(s) = 2.7831e05 \frac{s + 2.927}{s + 76.63}$$

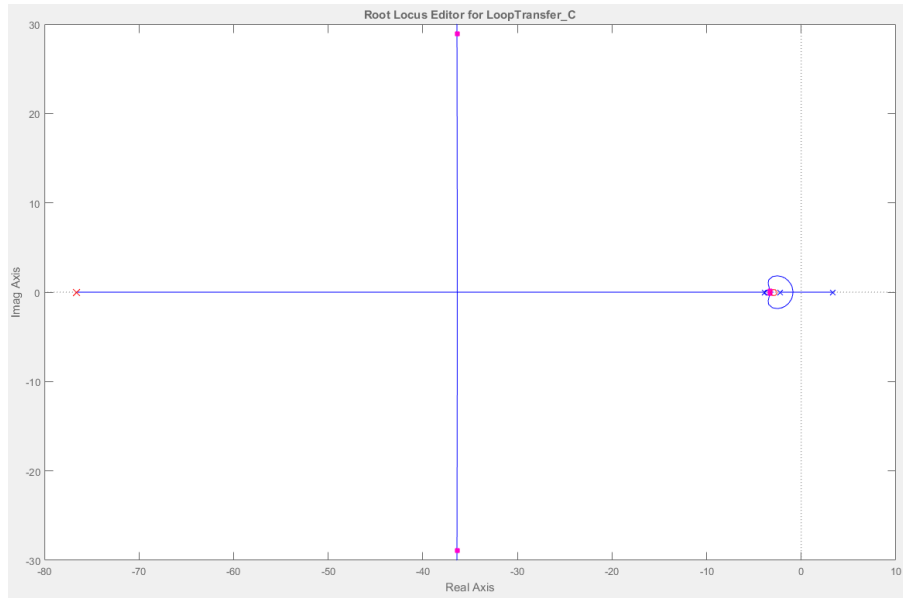


Figura 2: rlocus(G_{c1}) - con controllore

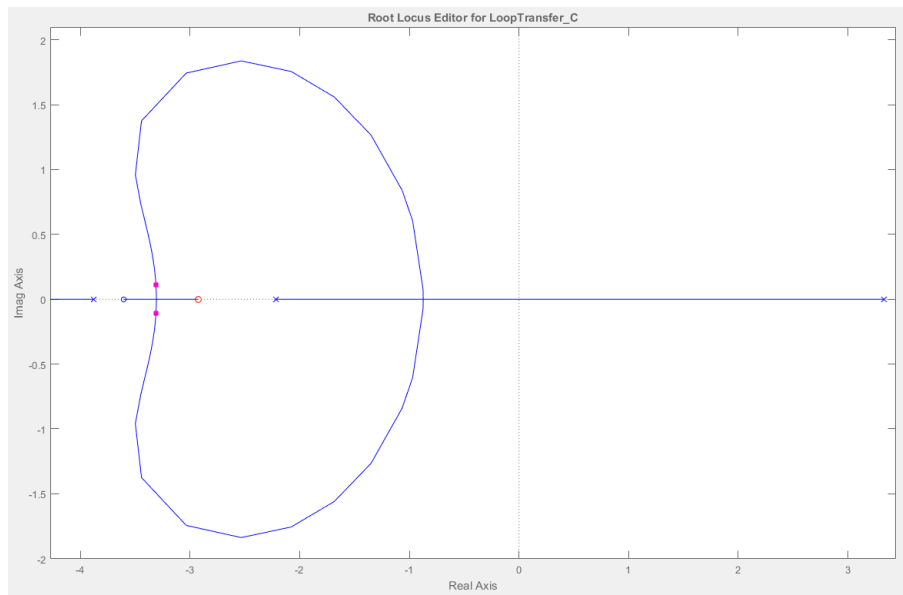


Figura 3: Dettaglio rlocus(G_{c1}) - con controllore

Adesso, è possibile procedere alla progettazione del controllore $C_2(s)$ per il soddisfacimento delle specifiche, con una funzione di trasferimento dell'anello interno pari a

$$G_{c1}(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = 2447.2 \frac{(s + 2.927)(s + 3.608)}{(s^2 + 6.623s + 10.98)(s^2 + 72.77s + 2155)}$$

e con una funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita pari a

$$G_{dc1}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = 0.0016032 \frac{s(s + 76.63)}{(s^2 + 6.623s + 10.98)(s^2 + 72.77s + 2155)}$$

- 4.1 Si procede anzitutto a progettare un controllore che consenta di soddisfare le specifiche relative alla risposta al gradino.

Si chiede che il sistema, partendo da una condizione di equilibrio pari a $\bar{h} = 0.3647 m$, sia portato ad una uscita pari a $h_\infty = 1.3647 m$, vale a dire un'ampiezza del gradino pari a $1 m$.

Si richiede che il valore desiderato venga raggiunto in maniera esatta senza mai superarlo. Viene quindi richiesto che, posto in ingresso un gradino, l'errore a regime sia nullo. Il sistema in anello (esterno) aperto $C_2(s) \cdot G_{c1}(s)$, quindi, deve possedere un polo nell'origine. Essendo la $G_{c1}(s)$ sprovvista di tale polo è necessario inserire un polo nell'origine ($1/s$) nel controllore $C_2(s)$. Chiedendo che il sistema non superi mai la quota desiderata si sta imponendo una sovraelongazione nulla ($S\% = 0\%$). Questo significa che il sistema $G_{c1}(s)$ chiuso in retroazione negativa sul controllore $C_2(s)$ deve essere approssimabile ad un sistema del primo ordine (approssimazione ad un solo polo dominante - **margine di fase $\approx 90^\circ$**).

Si richiede inoltre che la distanza h dal suolo entri entro $0.3 s$, senza più uscirne, nell'intervallo $[1.3147, 1.4147]m$. Si tratta di una specifica sul tempo di assestamento al $p\% = \frac{1.4147 - 1.3647}{1} 100 = 5\%$ (considerando l'altro estremo dell'intervallo assegnato si ottiene lo stesso valore) che si traduce in una specifica sulla pulsazione di taglio $\omega_t \geq \frac{3}{0.3} \Rightarrow \omega_t \geq \mathbf{10 rad/s}$.

- 4.2 Una volta chiuso anche l'anello esterno, l'uscita è legata al disturbo dalla funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{F_d(s)} = \frac{G_{dc1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per quanto riguarda la completa reiezione del disturbo costante è necessario (per il teorema del valore finale) che la f.d.t. che lega il disturbo alla uscita si annulli per $s = 0$. In questo caso, poichè la $G_{dc1}(s)$ ha uno zero nell'origine, detta specifica è già soddisfatta.

Per quanto riguarda il disturbo sinusoidale, secondo il teorema della risposta armonica, la specifica è assicurata se per le pulsazioni di interesse $\omega_d < 0.1 rad/s$, è rispettato il seguente vincolo sul modulo della funzione di trasferimento $\frac{Y(s)}{F_d(s)}$.

$$\frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < \frac{10^{-8}}{1} \Rightarrow \frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < 10^{-8}$$

Essendo a bassa frequenza, vale l'approssimazione $\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\| \approx \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|$; possiamo quindi tradurre la specifica in un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento di anello aperto, infatti, passando ad esprimere i moduli in decibel, otteniamo:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > \|G_{dc1}(j\omega_d)\|_{dB} - 20 \log_{10}(10^{-8})$$

dal diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $G_{dc1}(s)$ per le pulsazioni di interesse (figura 4) si ricava il valore ($-125dB$) che massimizza il modulo considerato, e quindi, la condizione che permette di soddisfare la specifica risulta:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > -125dB + 160dB \Rightarrow \|\mathbf{C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)}\|_{dB} > \mathbf{35dB}$$

- 4.3 L'uscita è legata al rumore di misura dalla funzione di sensitività complementare, cambiata di segno:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = - \frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per un disturbo in alta frequenza $\omega_\nu > 1000 rad/s$, vale l'approssimazione

$$\left\| \frac{Y(j\omega_\nu)}{\nu(j\omega_\nu)} \right\| \approx \|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\|$$

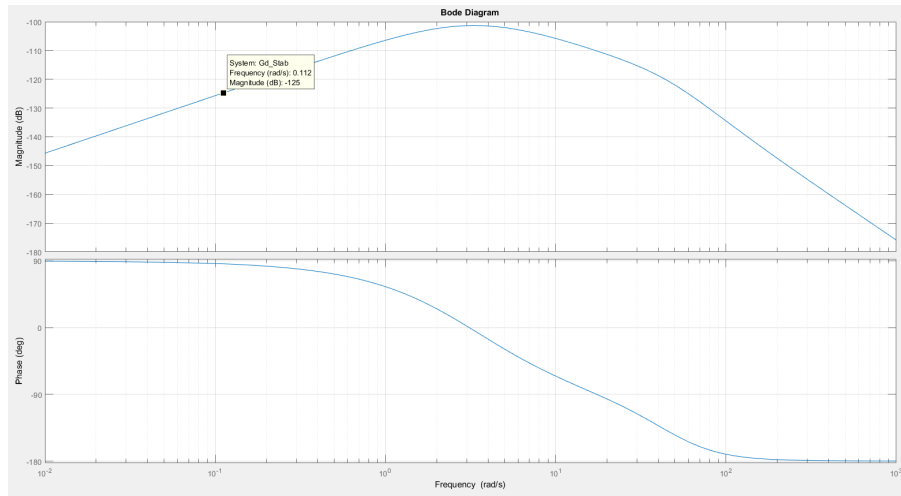


Figura 4: bode(G_{dc1})

per cui, detta A_N l'ampiezza del rumore di misura, la specifica si traduce in

$$\|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\| < \frac{0.001A_N}{A_N} = 0.001$$

o, in decibel, -60 dB.

Si noti che la conoscenza dell'ampiezza A_N sarebbe superflua.

Una volta tradotte tutte le specifiche, riportate sul diagramma di Bode in figura 5, è possibile procedere al progetto del controllore.

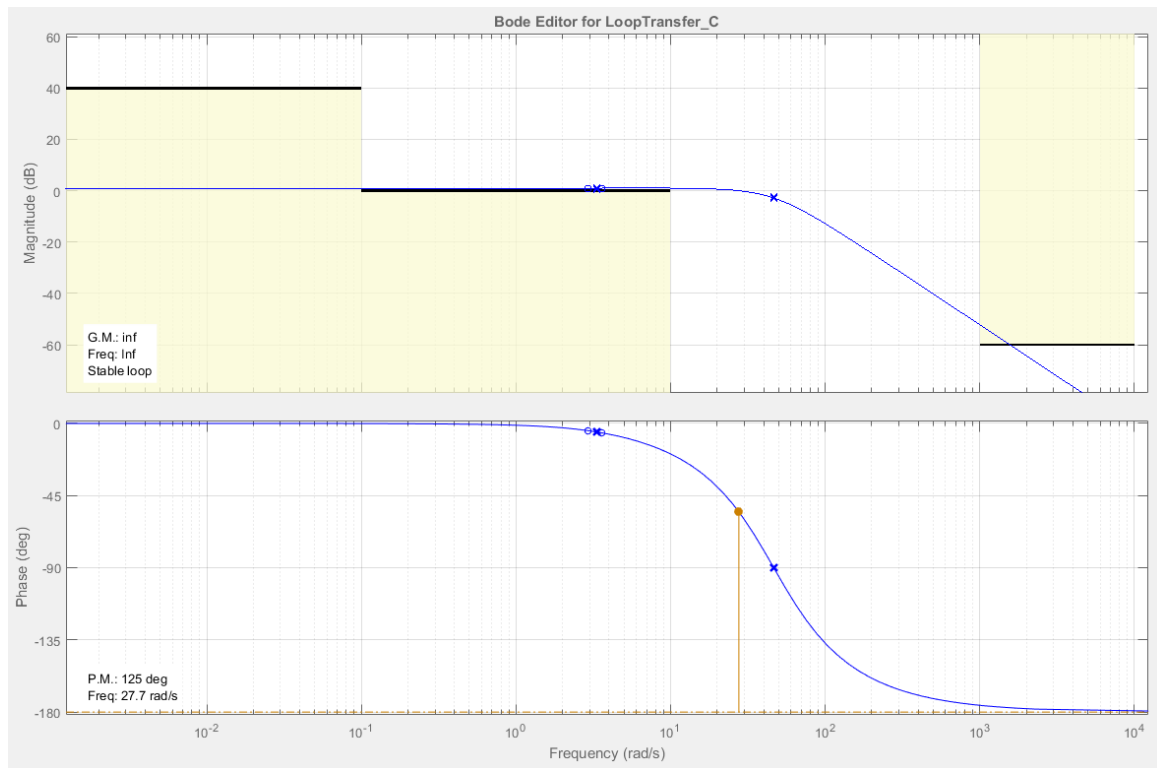


Figura 5: Diagramma di Bode di $G_{c1}(s)$ con specifiche richieste

Per il soddisfacimento delle specifiche statiche è necessario inserire un polo nell'origine, ottenendo il diagramma di Bode di figura 6, corrispondente a $C_{2statiche}(s) = \frac{1}{s}$.

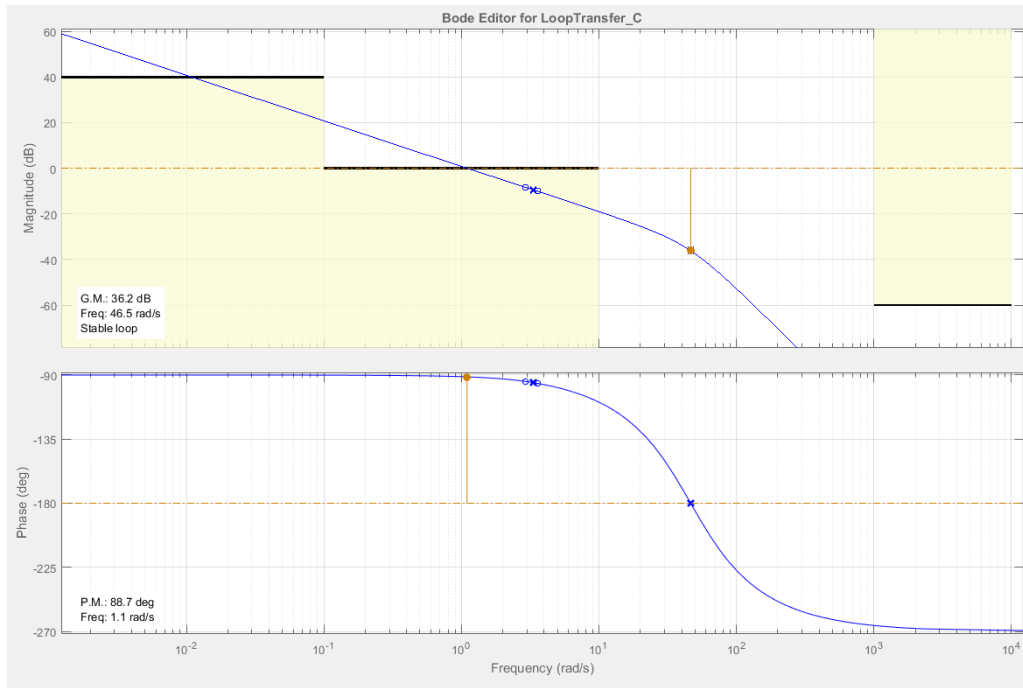


Figura 6: Diagramma di Bode del sistema controllato per il soddisfacimento delle specifiche statiche

Le specifiche sul tempo di assestamento, sul disturbo F_d e sul rumore di misura possono essere soddisfatte andando ad aumentare in maniera opportuna il guadagno del controllore, ottenendo il diagramma di Bode di figura 7, corrispondente a $C_{2_1}(s) = \frac{11.486}{s}$.

Analizzando il margine di fase riportato in figura 7 possiamo notare che risulta essere uguale a $M_f = 65.4$ deg, non sufficiente per affermare che il sistema $G_{c1}(s)$ chiuso in reazione sul controllore $C_2(s)$ possa essere approssimato come un sistema del primo ordine. Andando, infatti, ad analizzare la risposta al gradino unitario del sistema chiuso in retroazione con il controllore $C_{2_1}(s)$ l'andamento è quello riportato in figura 8.

Dalla risposta al gradino riportata in figura 8 è possibile notare la presenza di una sovraelongazione maggiore di zero a differenza di quanto richiesto dalle specifiche di progetto.

Per ottenere una risposta priva di sovraelongazione è possibile procedere inserendo uno zero tra la frequenza di taglio e i poli complessi coniugati del sistema, ottenendo il diagramma di Bode di figura 9, corrispondente a $C_{2_{finale}}(s) = 0.30226 \frac{(s+38)}{s}$.

La risposta a gradino del sistema controllato con il controllore proposto $C_{2_{finale}}(s) = 0.30226 \frac{(s+38)}{s}$ risulta essere come quella riportata in figura 10. Analizzando la figura 10 si può notare che l'overshoot (sovraelongazione) massimo del sistema controllato risulta essere del 0% (da specifica doveva essere nulla) e che il settling time (tempo di assestamento) è di 0.225s (da specifica doveva essere inferiore a 0.3s).

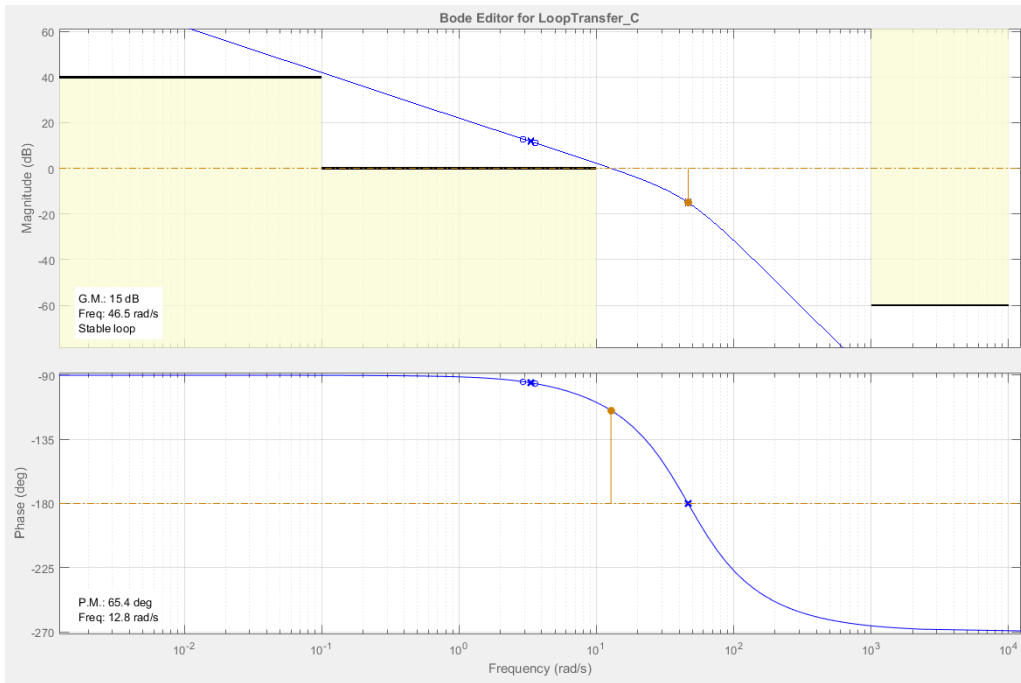


Figura 7: Diagramma di Bode del sistema controllato per il soddisfacimento delle specifiche statiche e delle specifiche dinamiche

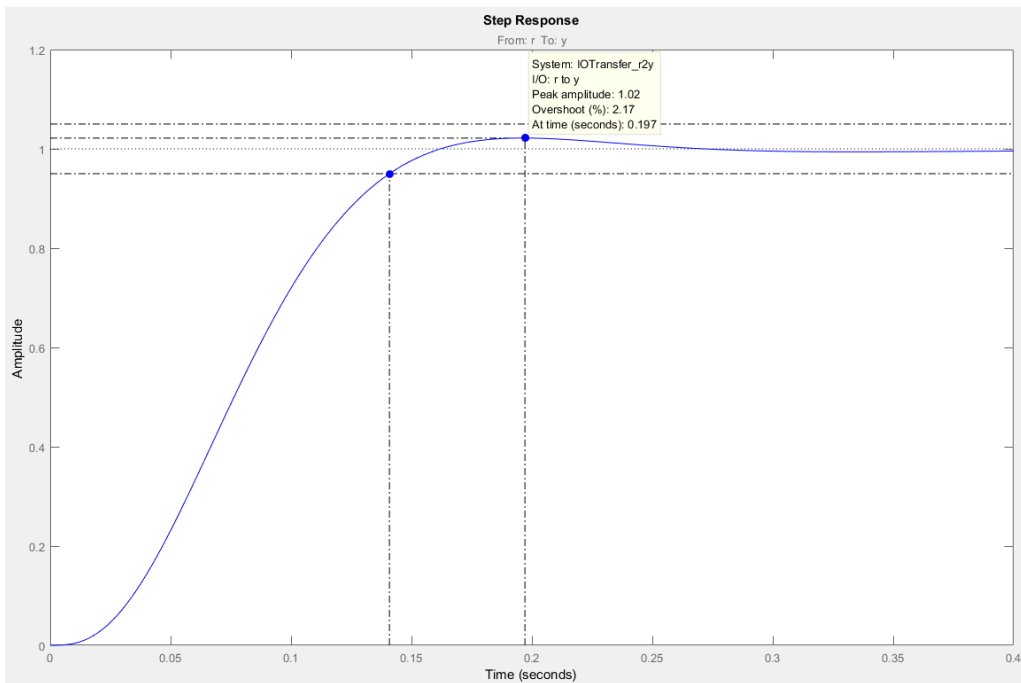


Figura 8: Risposta al gradino del sistema $G_{c1}(s)$ controllato mediante il controllore $C_{21}(s)$

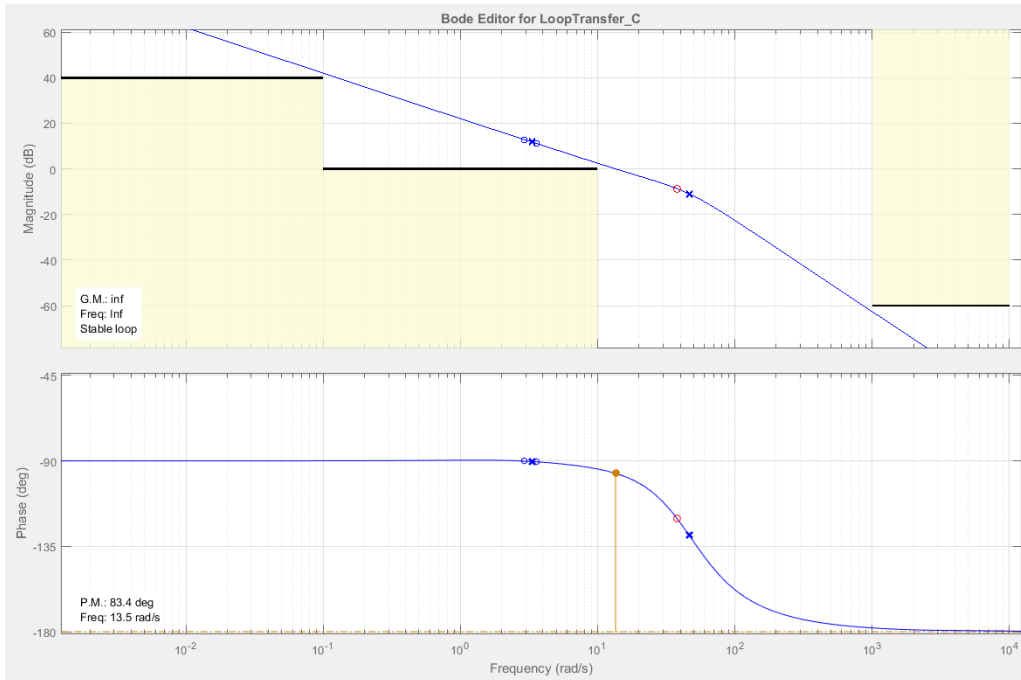


Figura 9: Diagramma di Bode del sistema $G_{c1}(s)$ controllato mediante il controllore $C_2(s)$

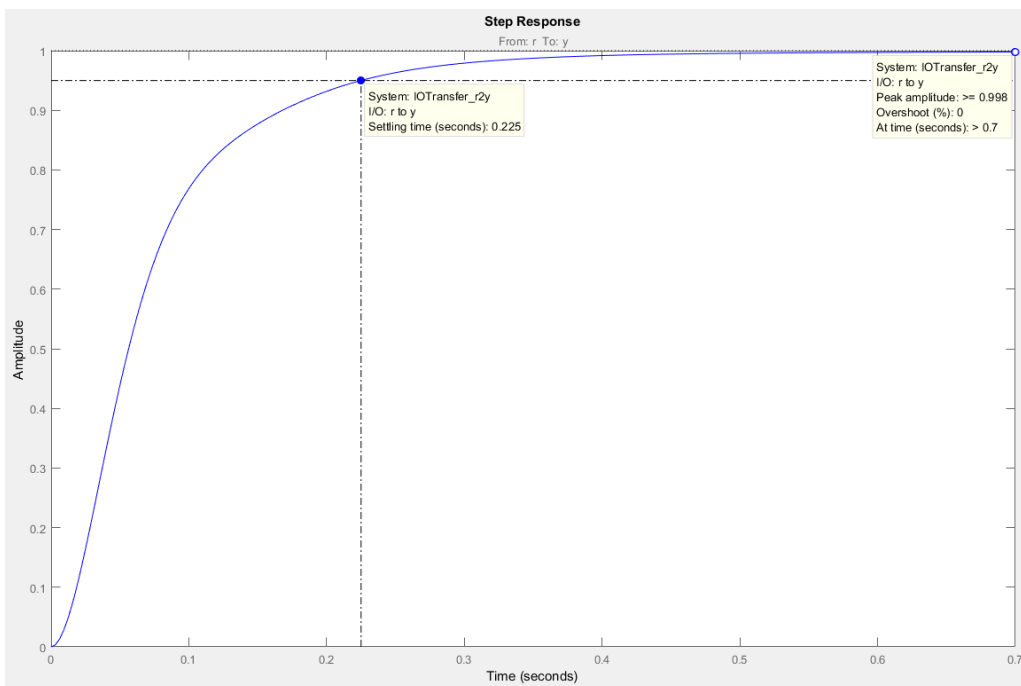


Figura 10: Risposta al gradino del sistema controllato con evidenziate l'overshoot (sovraelongazione) massimo e il settling time (tempo di assestamento)