

Introduzione elementare al metodo degli Elementi Finiti

+ Obiettivi

- Introduzione elementare al metodo degli elementi finiti
 - Analisi Termica
 - Analisi Strutturale
 - Analisi Fluidodinamica
- Utilizzo del software COMSOL 3.5



+ Un po' di "filosofia"

Come avviene anche in altri settori di ricerca, la modellistica di per sé non è un'attività esclusivamente scientifica, anche se, naturalmente vi sono concetti universali che essa deve riprodurre, quali ad esempio la conservazione di massa e energia di un fluido, del momento d'inerzia di una struttura, [...],

vi è in effetti anche una componente *artistica* dietro una simulazione di successo, che deriva dal **sapere quali domande ha senso porre**, quale livello di *dettaglio* ha senso mettere nelle diverse componenti del modello, quali *semplificazioni* apportare in modo da favorire una sua integrazione con modelli diversi.

+ Analisi agli elementi finiti

- Metodo per la risoluzione **numerica** di una equazione differenziale, sia essa alle derivate totali o parziali
- Più precisamente si tratta di un metodo per approssimare una equazione differenziale con un sistema di equazioni algebriche



+ Terminologia

- Campo fisico (termico, elastico, fluidodinamico)
 - Stazionario
 - Statico
 - Variabile
 - Leggi (*equazioni differenziali*)
- Sorgenti
 - Interne
 - Esterne (*condizioni al contorno*)



+ Terminologia

Lo studio di un campo ha come fine la determinazione di una o più grandezze scalari o vettoriali (**problema fondamentale**) che dipendono dalla posizione e dal tempo e che prendono i nomi di potenziali del campo

Campo	Sorgente	Potenziale
Termico	Fonti di Calore	Temperatura (scalare)
Elettrostatico	Cariche elettriche	Potenziale Elettrico (scalare)
Magnetostatico	Correnti Elettriche	Potenziale Vettore (vettoriale)
Elastico	Forze	Spostamento (vettoriale)
Fluidodinamico	Forze	Velocità (vettoriale); Pressione (scalare)
Elettromagnetico	Carche e correnti elettriche	Potenziale Elettrico (scalare), Potenziale Vettore (vettoriale)

+ Problema fondamentale

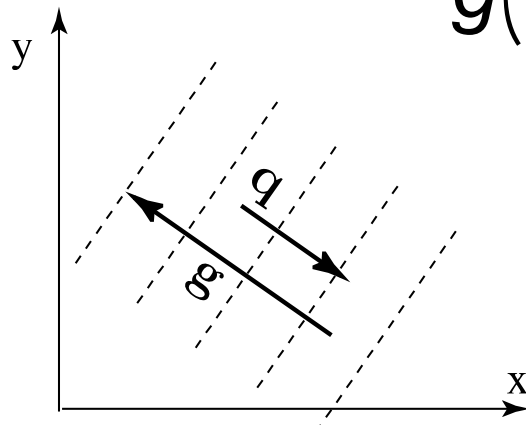
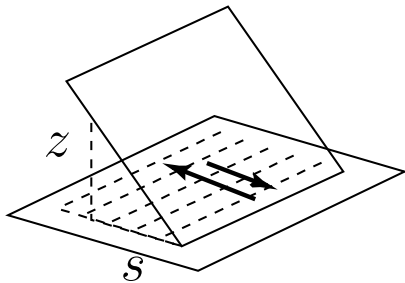
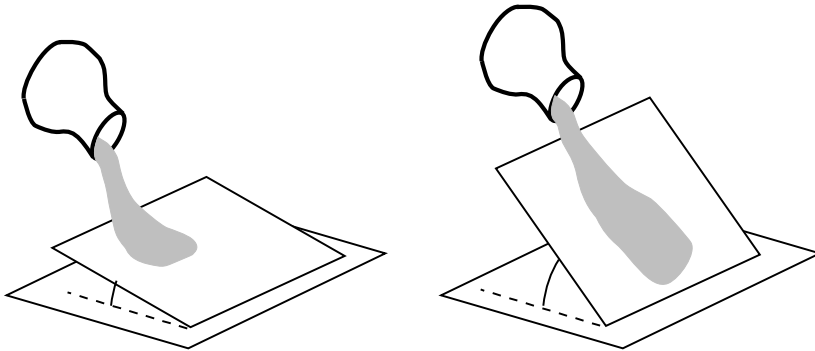
- Assegnata la regione entro la quale si vuole considerare il campo
- Assegnato l'intervallo di tempo entro il quale si vuole considerare il campo
- Precisata la natura dei materiali contenuti entro la regione
- Assegnate la posizione e l'intensità delle sorgenti
- Precisate le condizioni al contorno della regione
- **Determinare in *ogni* punto ed in *ogni* istante i potenziali del campo**



+ Nozioni preliminari (1/4)



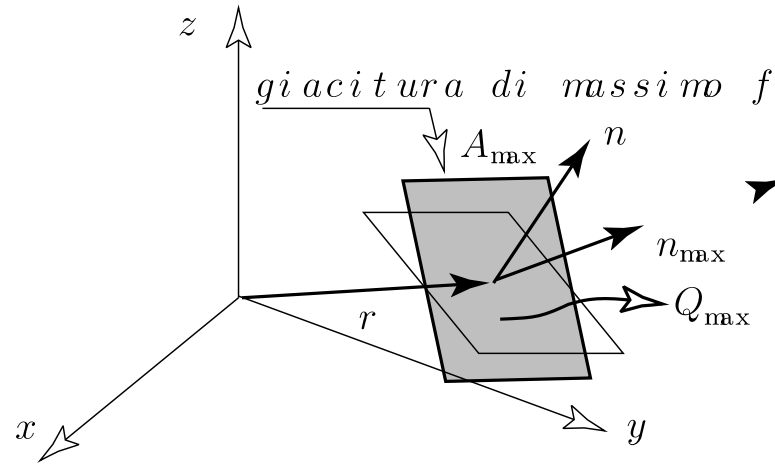
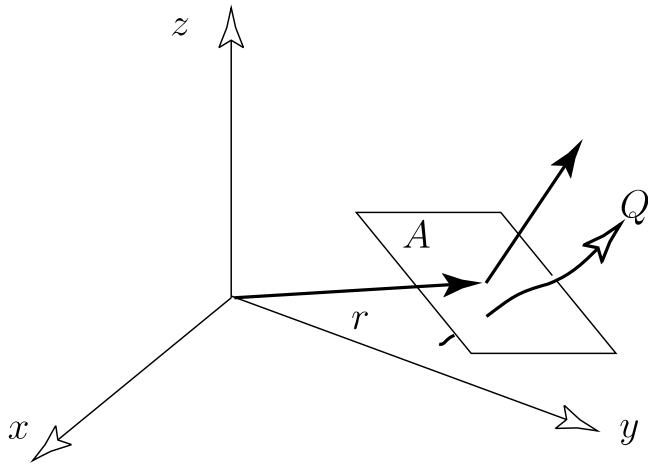
- Gradiente di uno scalare



$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

+ Nozioni preliminari (2/4)

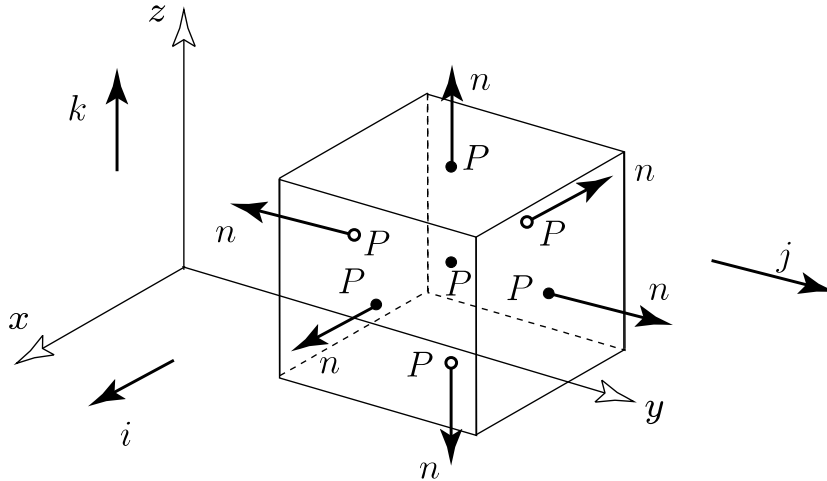
- Densità di flusso



$$\vec{q}(\vec{r}) = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{A} \right)_{max} \vec{n}_{max}.$$

+ Nozioni preliminari (3/4)

- Divergenza di un vettore



$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{q}$$

+ Nozioni preliminari (4/4)

- Operatore vettoriale nabla

$$\nabla = +\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Quindi il gradiente diventa

$$\text{grad } u = \left[\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \right] u = \nabla u$$

- E la divergenza diventa

$$\text{div } \vec{q} = \left[+\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}] = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{q}$$

ANALISI TERMICA

+ Prima equazione costitutiva

- la quantità di calore che transita attraverso un elemento di superficie piana tangente ad una superficie isoterma per unità di area e per unità di tempo è proporzionale al salto di temperatura per unità di lunghezza misurato perpendicolarmente alla superficie

$$\vec{q} = -k \vec{g}.$$

+ Seconda equazione costitutiva

- Incremento dell'energia interna legato all'aumento della temperatura.

$$d_t u = \rho c d_t T$$

+ Equazione di Bilancio

- calore generato =
calore accumulato + calore uscente

$$Q_{gen} = Q_{acc} + Q_{usc}$$

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.$$

+ Equazione fondamentale

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \sigma.$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T = S$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T = S$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \mathcal{D} T = S$$

+ I tre casi

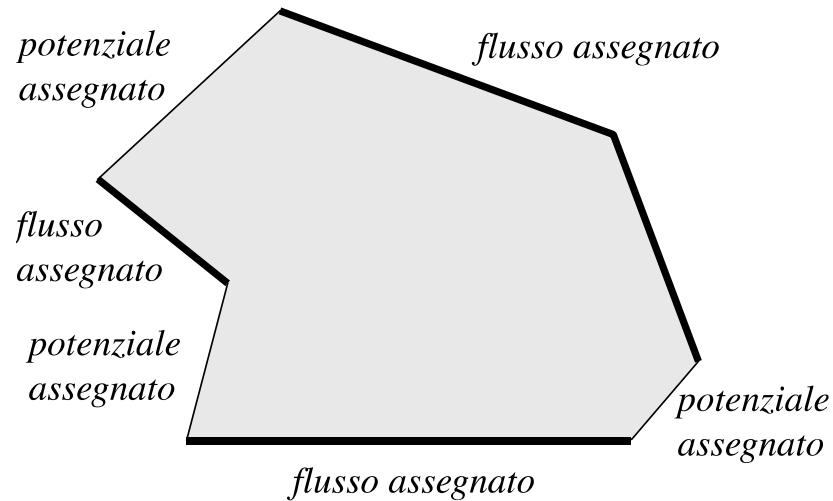
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0 \quad \textit{Fourier}$$

$$-k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \sigma \quad \textit{Poisson}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \textit{Laplace}$$

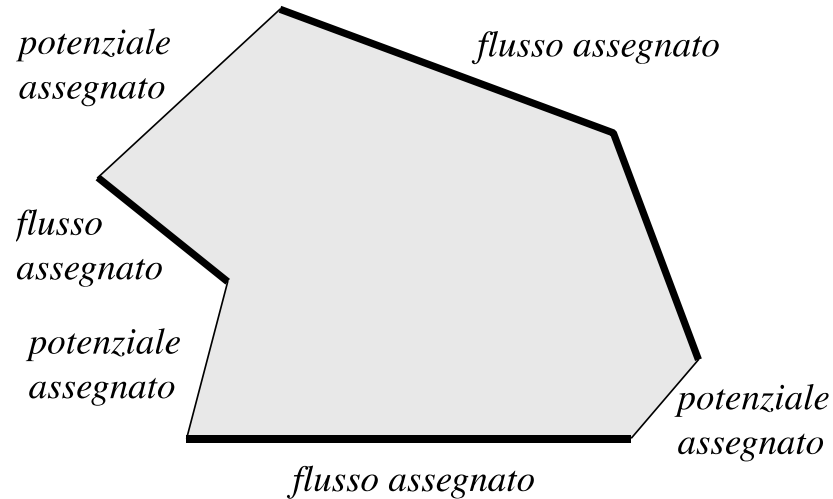
+ Condizioni al contorno 1/3

$$-k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \sigma$$



+ Condizioni al contorno 2/3

$$\left\{ \begin{array}{l} -k \nabla^2 u(x, y) = \sigma(x, y) \\ u(x, y) = \textit{assegnata su una parte del contorno} \\ -k \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \textit{assegnata sulla parte rimanente del contorno} \end{array} \right.$$



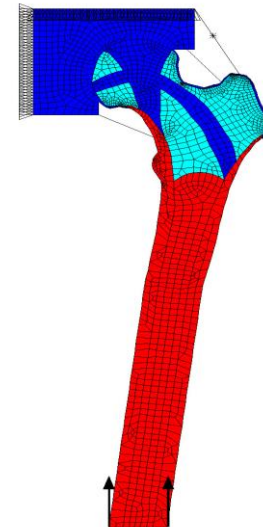
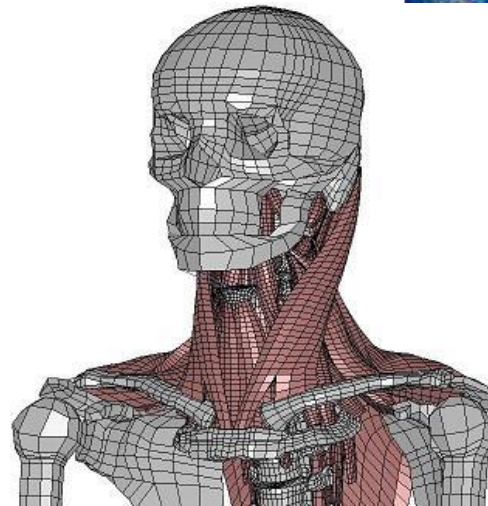
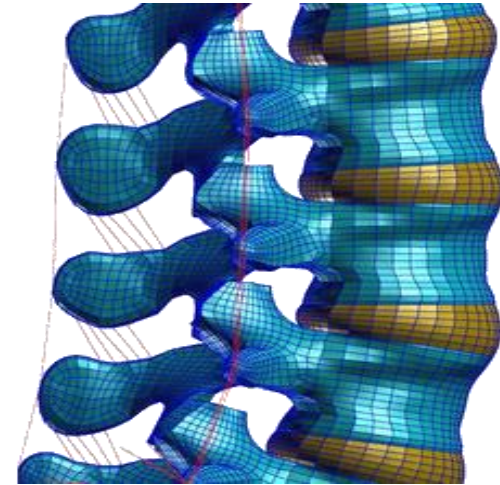
+ Condizioni al contorno 3/3



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{problema di Dirichlet} \\ -k \Delta u = \sigma \\ u|_{\partial\Omega} = \textit{assegnato} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{problema di Neumann} \\ -k \Delta u = \sigma \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \textit{assegnato} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{problema misto} \\ -k \Delta u = \sigma \\ u|_A = \textit{assegnato} \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_B = \textit{assegnato} \\ A \cup B = \partial\Omega \end{array} \right.$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Elementi
- Nodi
- Funzioni Forma
- Gradi di libertà





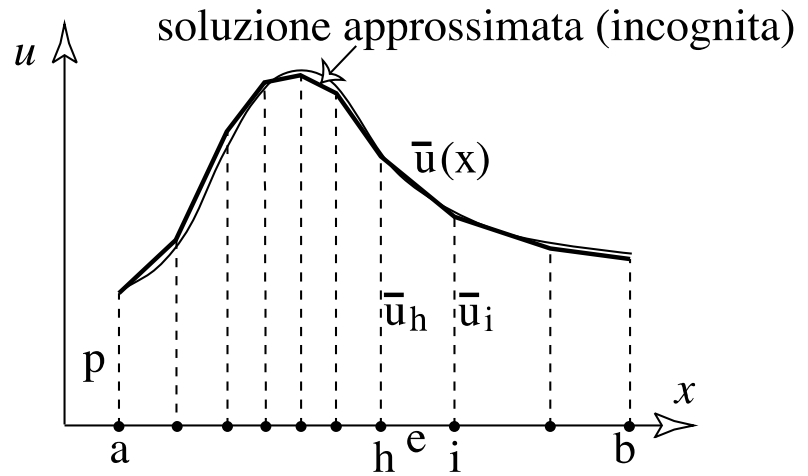
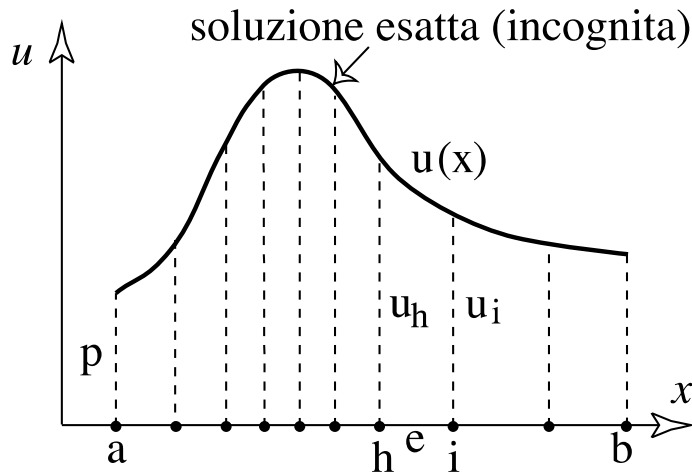
Analisi agli elementi finiti



- Il FEM è un metodo numerico (pertanto approssimato) che permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Il metodo degli elementi finiti consiste nella *discretizzazione* di un assegnato dominio in **elementi** fra loro connessi in un numero **finito** di punti (**nod**i), vertici degli elementi, in corrispondenza dei quali sono valutate le componenti della funzione incognita.
- Il valore della funzione all'interno del singolo elemento è ottenuto sulla base dei valori dei parametri nodali attraverso l'uso di opportune *funzioni di forma*.
- La scelta di tali funzioni, come pure del tipo di *mesh* con cui discretizzare il dominio è di importanza cruciale per una corretta convergenza della soluzione.

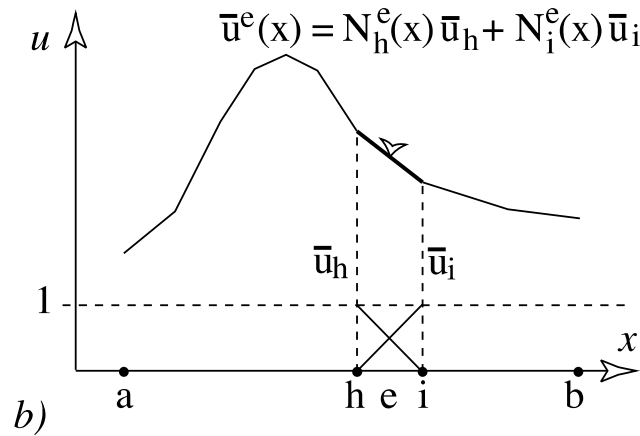
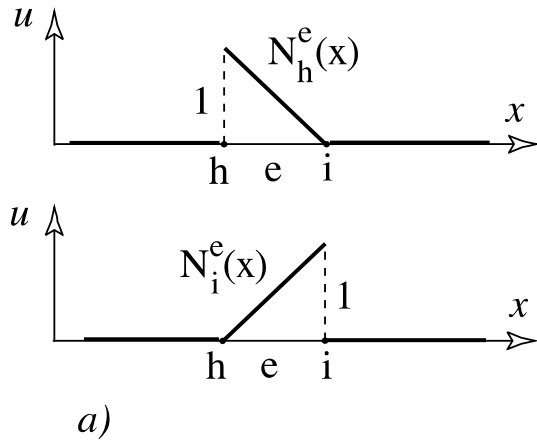
CASO MONODIMENSIONALE

+ Analisi agli elementi finiti



+ Analisi agli elementi finiti

- Funzioni forma (elementi)

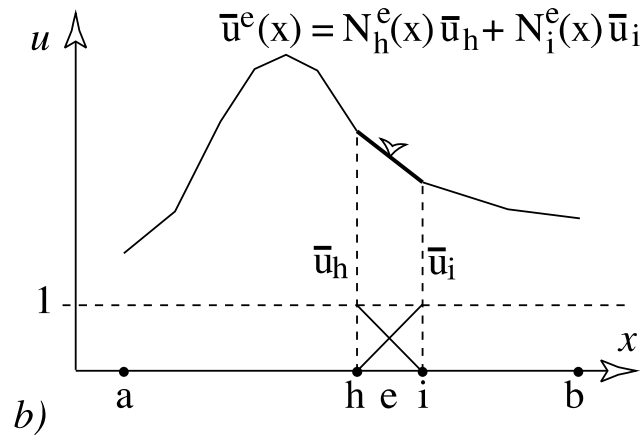
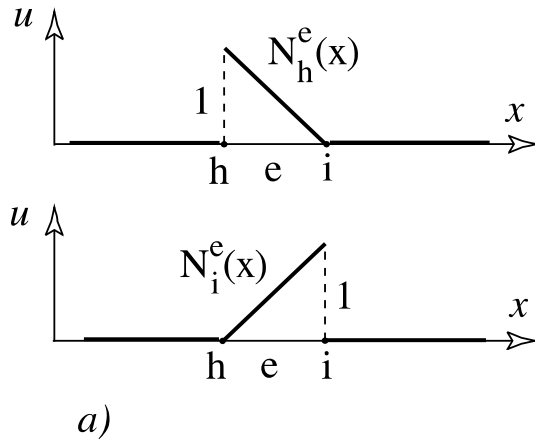


$$N_h^e(x) \triangleq \frac{x_{h+1} - x}{x_{h+1} - x_h}$$

$$N_{h+1}^e(x) \triangleq \frac{x - x_h}{x_{h+1} - x_h}$$

+ Analisi agli elementi finiti

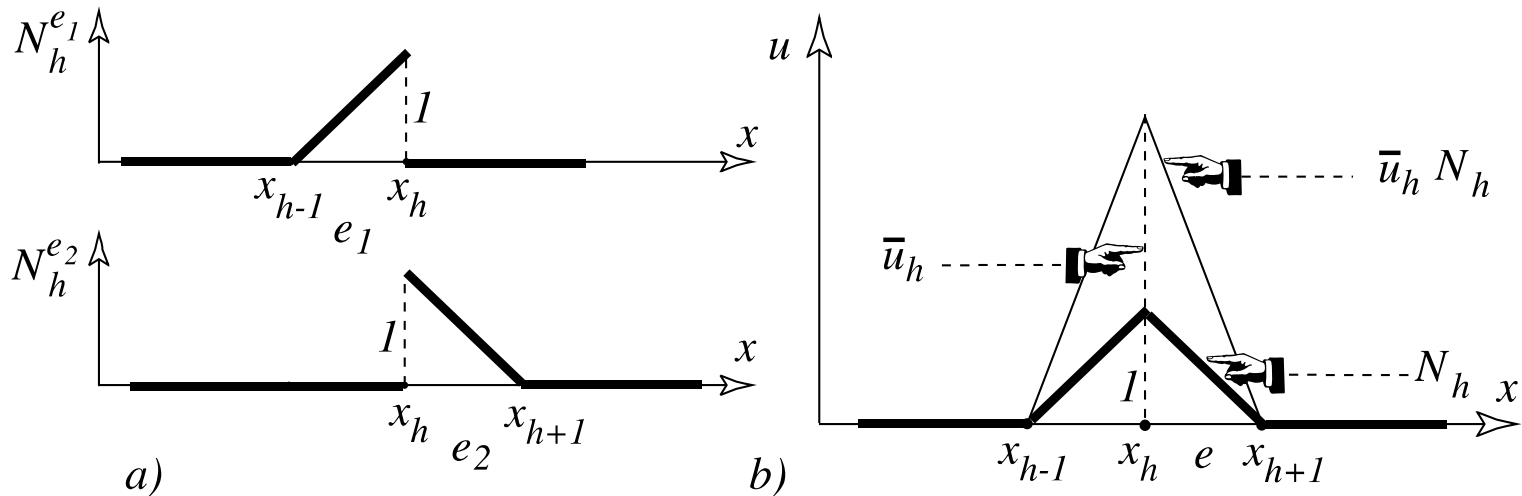
- Funzioni forma (elementi)



$$\bar{u}^e(x) = N_h^e(x) \bar{u}_h + N_{h+1}^e(x) \bar{u}_{h+1}$$

+ Analisi agli elementi finiti

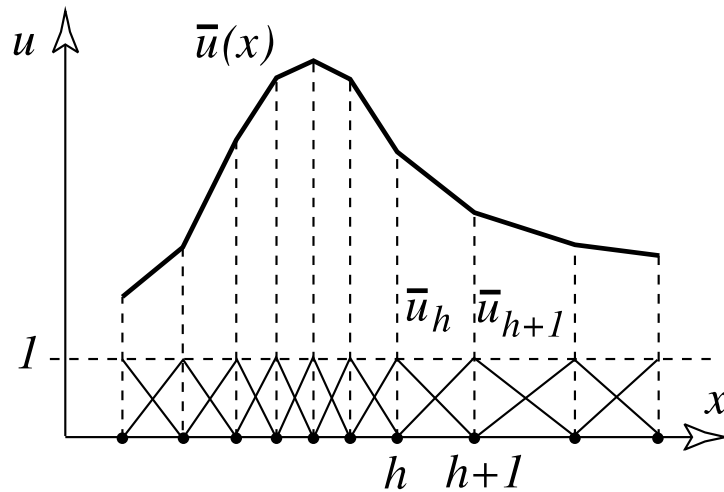
- Funzioni forma (nodi)



$$\begin{cases} N_h(x) \triangleq N_h^{e_1}(x) + N_h^{e_2}(x) & \text{per } x_{h-1} \leq x \leq x_{h+1} \\ N_h(x) \triangleq 0 & \text{per } x \leq x_{h-1} \text{ e per } x_{h+1} \leq x \end{cases}$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Descrivere la funzione approssimamente come una combinazione delle funzioni di forma nodali:



$$\bar{u}(x) = \sum_{h=1}^n \bar{u}_h N_h(x)$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Risoluzione: metodo di Galerkin (minimizzazione dell'errore)
- Se l'equazione di partenza è

$$-k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = s(x)$$

- La soluzione approssimata conterrà un errore

$$r(x; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) = -k \sum_{h=1}^n \frac{d^2 N_h(x)}{dx^2} \bar{u}_h - s(x)$$

+ Analisi agli elementi finiti

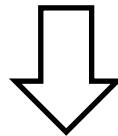
- Determinare i “migliori” coefficienti minimizzano gli errori (metodo di Galerkin)
 - Residuo ortogonale alle n funzioni nodali
 - Integrazione per parti sulla derivata seconda per abbassare l'ordine delle derivate
 - Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

$$\sum_{h=1}^n f_{ih} \bar{u}_h = s_i + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Residuo ortogonale alle n funzioni nodali

$$\int_a^b N_i(x) r(x; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) dx = 0$$

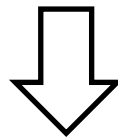


$$\int_a^b N_i(x) \left[-k \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - s(x) \right] dx = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Integrazione per parti sulla derivata seconda per abbassare l'ordine delle derivate

$$-k \left[N_i(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b + \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} dx - \int_a^b N_i(x) s(x) dx = 0.$$



$$\int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} dx = \int_a^b N_i(x) s(x) dx + k \left[N_i(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

$$\left\{ \begin{aligned} \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} dx &= \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \left[\sum_{h=1}^n \frac{dN_h(x)}{dx} \bar{u}_h \right] dx \\ &= \sum_{h=1}^n \left[\int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx \right] \bar{u}_h \\ &= \sum_{h=1}^n f_{ih} \bar{u}_h \end{aligned} \right.$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Formazione del sistema algebrico (**matrice fondamentale**)

$$f_{ih} \triangleq \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx.$$

+ Analisi agli elementi finiti

- Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

$$s_i \triangleq \int_a^b N_i(x) s(x) dx$$

$$c_i \triangleq k \left[N_i(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b$$

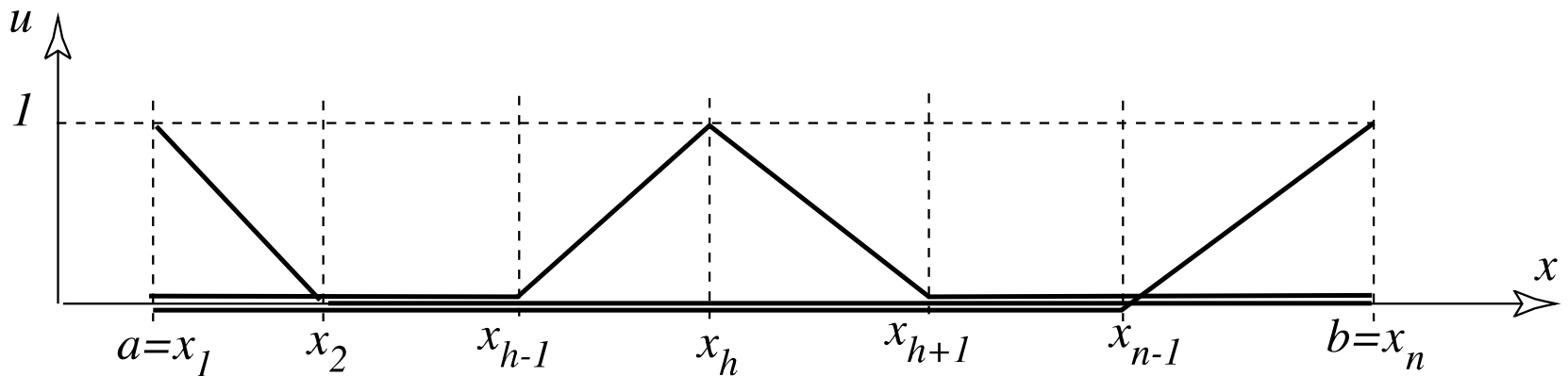
+ Analisi agli elementi finiti

- Formazione del **sistema algebrico**

$$\sum_{h=1}^n f_{ih} \bar{u}_h = s_i + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
 - $i=h$, con h nodo interno
 - $i=h=1$
 - $i=h=n$
 - $i \neq h$



+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
 - $i=h$, con h nodo interno

$$\begin{aligned} f_{h,h} &= \int_a^b k \left[\frac{dN_h}{dx} \right]^2 dx \\ &= k \int_{x_{h-1}}^{x_h} \left[\frac{1}{x_h - x_{h-1}} \right]^2 dx + k \int_{x_h}^{x_{h+1}} \left[-\frac{1}{x_{h+1} - x_h} \right]^2 dx \\ &= k \left(\frac{1}{x_h - x_{h-1}} + \frac{1}{x_{h+1} - x_h} \right) \end{aligned}$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:

– $i=h=1$

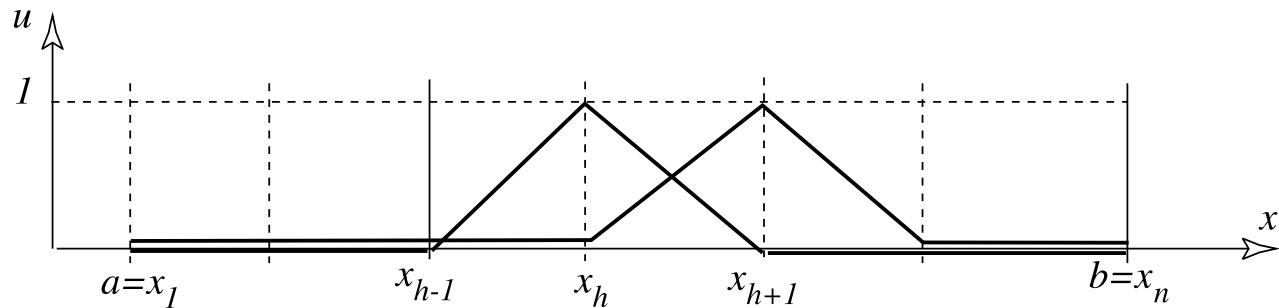
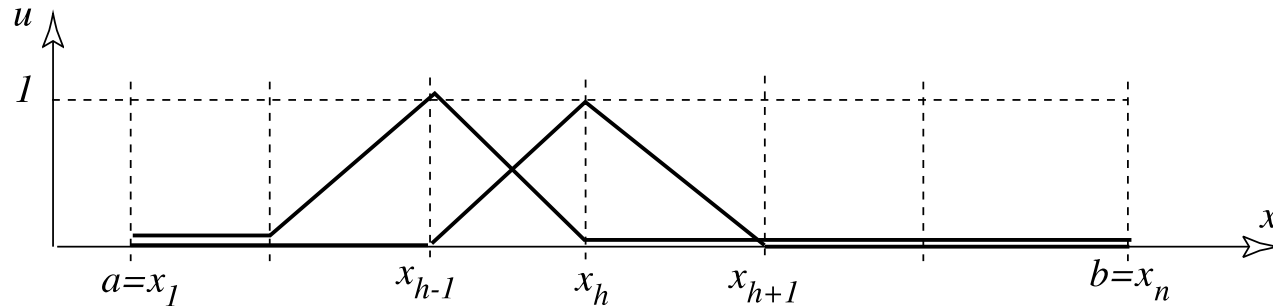
$$f_{1,1} = \int_a^b k \left[\frac{dN_1}{dx} \right]^2 dx = k \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \right]^2 dx = k \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right)$$

– $i=h=n$

$$f_{n,n} = \int_a^b k \left[\frac{dN_n}{dx} \right]^2 dx = k \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right]^2 dx = k \left(\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right)$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
 - $i \neq h$



+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
 - $i \neq h$ (adiacenti)

$$\begin{aligned} f_{h-1,h} &= \int_a^b k \frac{dN_{h-1}(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx = \int_{x_{h-1}}^{x_h} k \frac{-1}{x_h - x_{h-1}} \frac{1}{x_h - x_{h-1}} dx \\ &= -k \left(\frac{1}{x_h - x_{h-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{h+1,h} &= \int_a^b k \frac{dN_{h+1}(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx = \int_{x_h}^{x_{h+1}} k \frac{1}{x_{h+1} - x_h} \frac{-1}{x_{h+1} - x_h} dx \\ &= -k \left(\frac{1}{x_{h+1} - x_h} \right) \end{aligned}$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
 - $i \neq h$ (non adiacenti) $\rightarrow f_{hk} = 0$
 - La matrice fondamentale è tridiagonale



+ Calcolo esplicito dei coefficienti

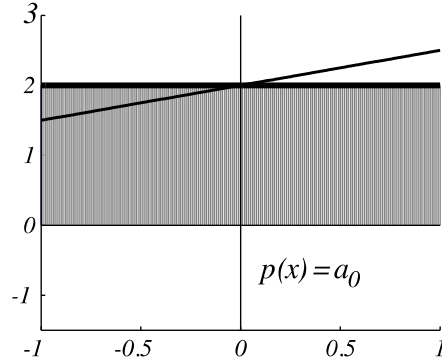
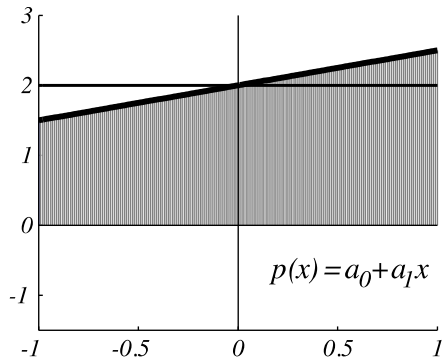
- Calcolo degli s_i

$$s_i \triangleq \int_a^b N_i(x) s(x) dx = \int_{e_1} N_i(x) s(x) dx + \int_{e_2} N_i(x) s(x) dx$$

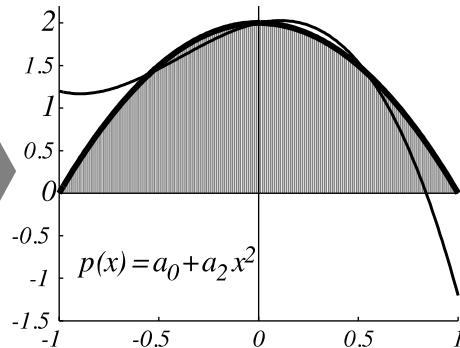
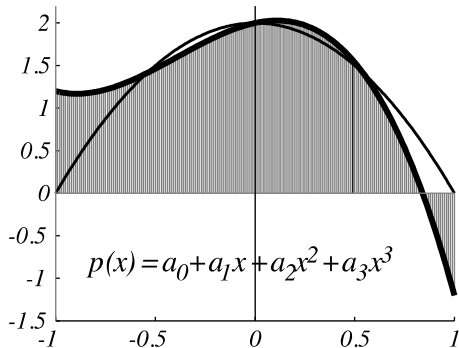
$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} s(x) dx \\ s_h = \int_{x_{h-1}}^{x_h} \frac{x - x_{h-1}}{x_h - x_{h-1}} s(x) dx + \int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{x_{h+1} - x}{x_{h+1} - x_h} s(x) dx \\ s_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} s(x) dx \end{array} \right.$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Calcolo degli s_i
 - Utilizzo dei punti di Gauss



$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k p(x_k)$$



+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Calcolo degli c_i
- Ipotizzando che il sistema da risolvere sia

$$-k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = s(x) \quad u|_a = 0 \quad -k \frac{du}{dx} \Big|_b = 0$$

$$c_i \triangleq k \left[N_i(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b = k N_i(b) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \Big|_b$$

$$c_n = \left[k \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_b = 0$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Calcolo degli c_i
- Ipotizzando che il sistema da risolvere sia

$$-k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = s(x) \quad u|_a = 0 \quad -k \frac{du}{dx} \Big|_b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per } i = 1 \\ \text{per } i = 2, 3, \dots, (n - 1) \\ \text{per } i = n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} c_1 \text{ non si può calcolare} \\ c_i = 0 \\ c_n = 0 \end{array}$$

+ Calcolo esplicito dei coefficienti

- Sistema finale

$$\begin{cases} f_{1,1} \bar{u}_1 + f_{1,2} \bar{u}_2 + \dots + f_{1,n} \bar{u}_n & = & s(1) + c(1) \\ f_{2,1} \bar{u}_1 + f_{2,2} \bar{u}_2 + \dots + f_{2,n} \bar{u}_n & = & s(2) + c(2) \\ \dots & & \\ f_{n,1} \bar{u}_1 + f_{n,2} \bar{u}_2 + \dots + f_{n,n} \bar{u}_n & = & s(n) + c(n) \end{cases}$$

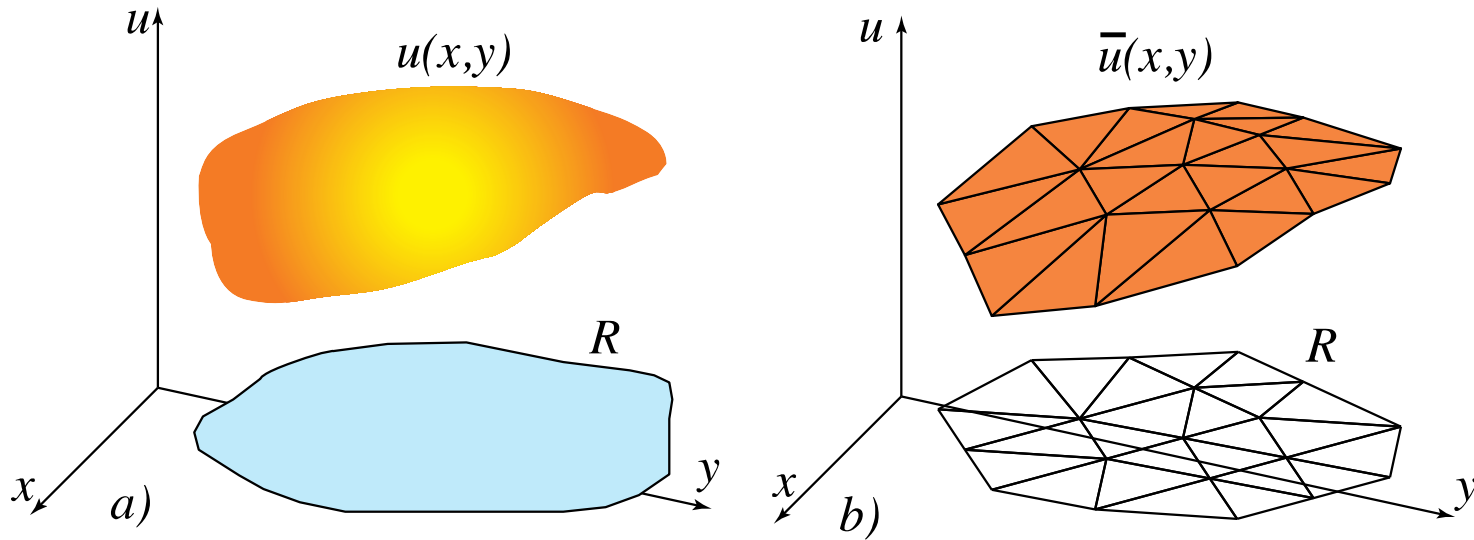
Dove

$$1 \bar{u}_1 + 0 \bar{u}_2 + \dots + 0 \bar{u}_n = 0$$

$$f_{1,1} = 1 \text{ e } f_{1,h} = 0 \text{ per } h \neq 1.$$

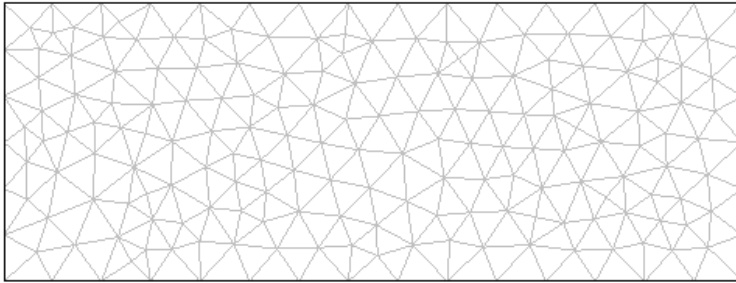
CASO BIDIMENSIONALE

+ Suddivisione del dominio in elementi

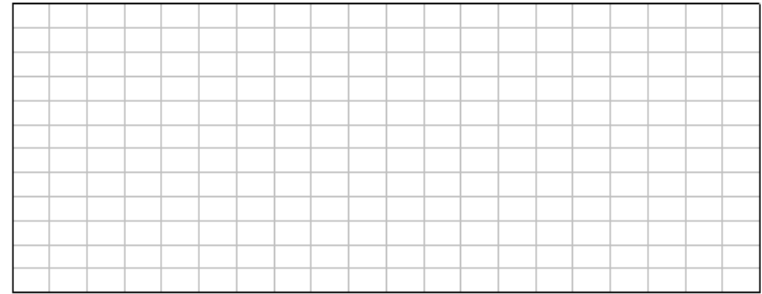


+ Mesh

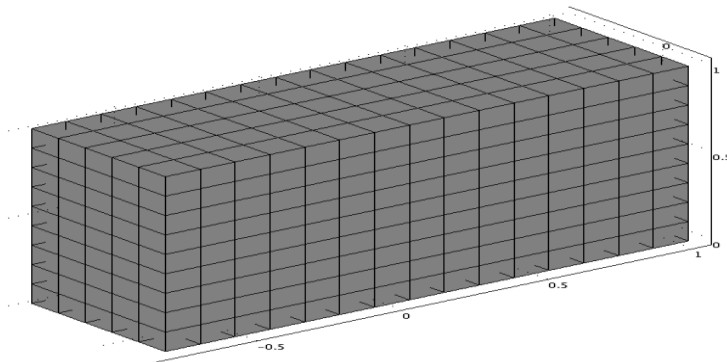
- Free Mesh



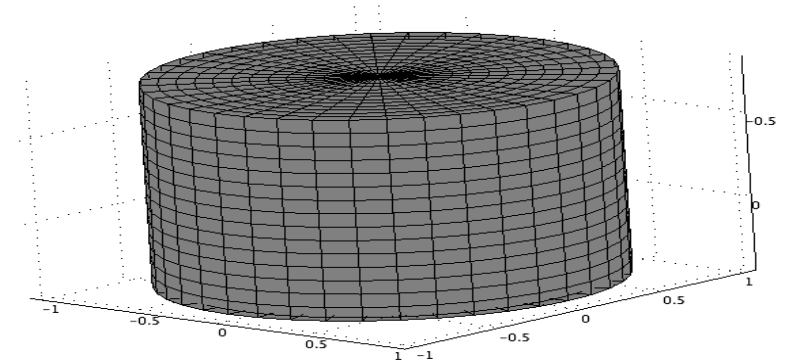
- Mapped Mesh



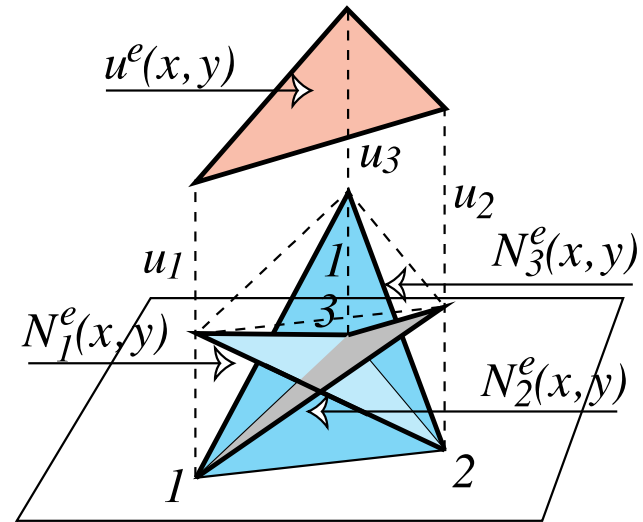
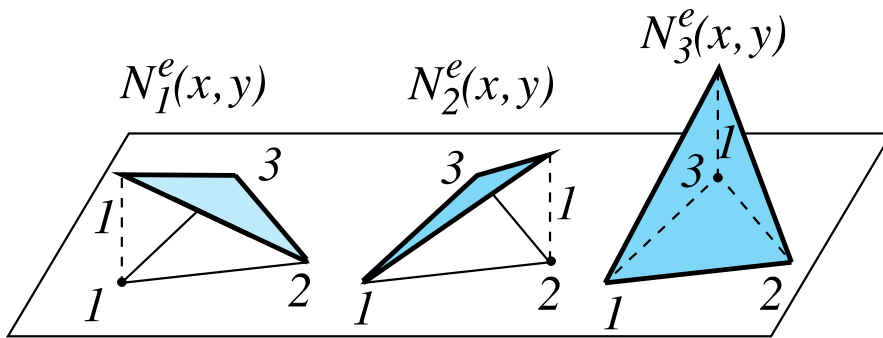
- Extruded Mesh



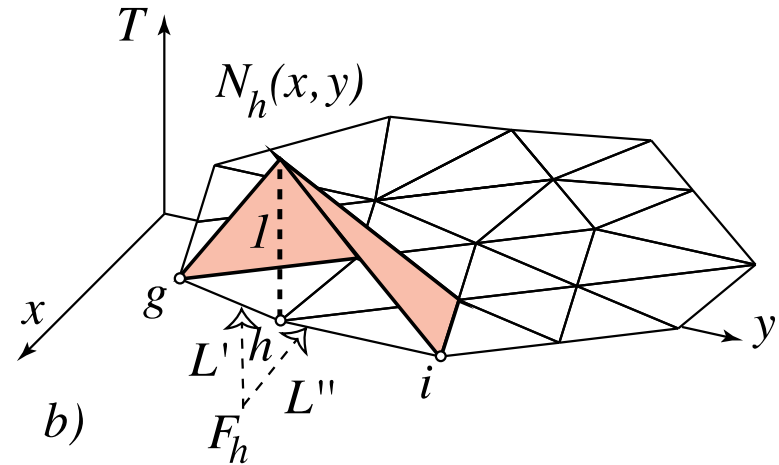
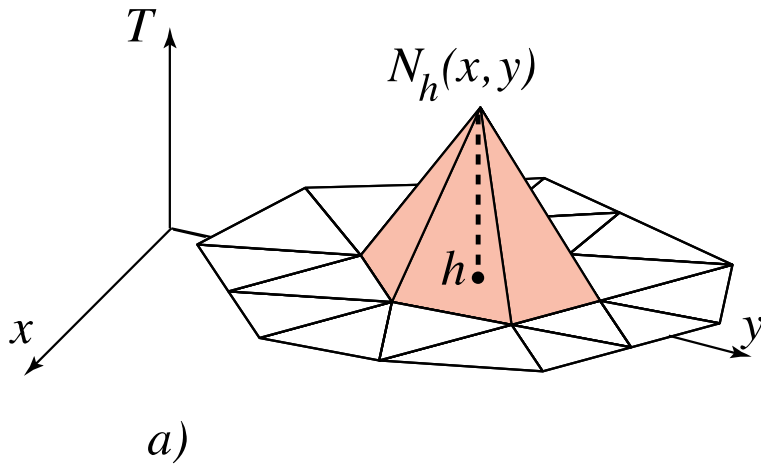
- Revolved Mesh



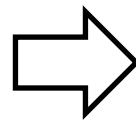
+ Funzioni di forma degli elementi



+ Funzioni di forma nodali



$$\bar{u}(x, y) = \sum_{h=1}^M \bar{u}_h N_h(x, y)$$



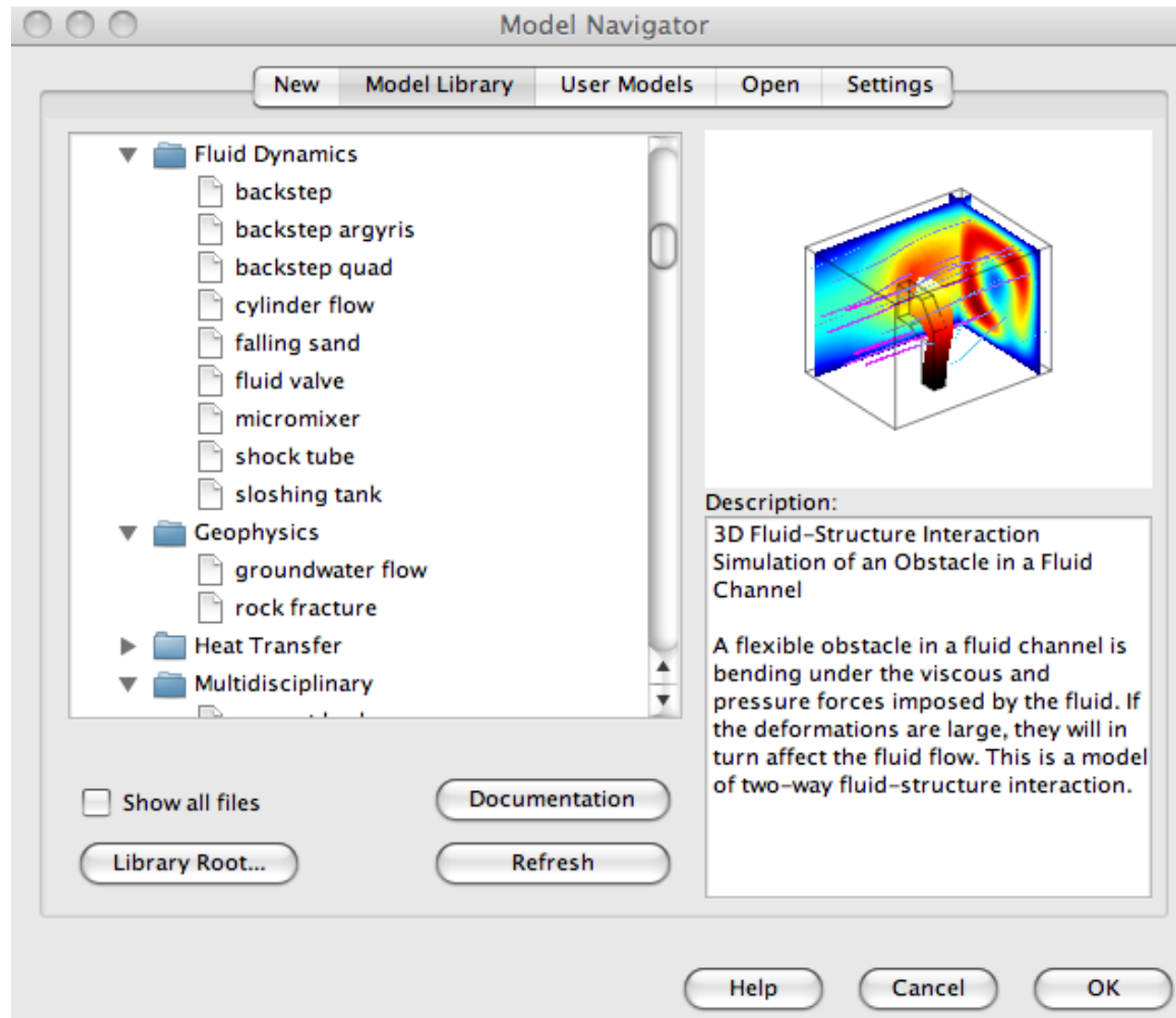
Metodo di
Galerkin

+ Nota

- Esistono altre strade che possono portare alla formulazione della “matrice fondamentale”
 - Metodi variazionali (principio dei lavori virtuali)
 - Formulazione diretta
 - Minimizzazione di un funzionale (energia potenziale totale)



+ Comsol Multiphysics



+ Documenti utili

- <http://www.dicar.units.it/mdp/tonti/science/elementiFiniti.pdf>

