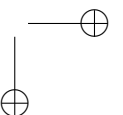
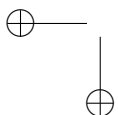
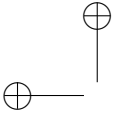


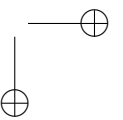
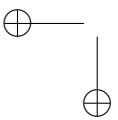
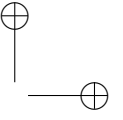
Enzo Tonti

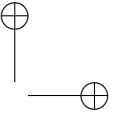
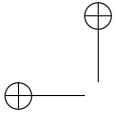
**Introduzione elementare
al metodo degli elementi finiti**





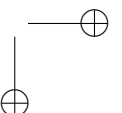
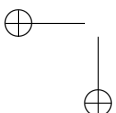
2

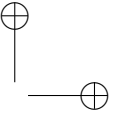
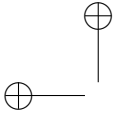




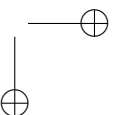
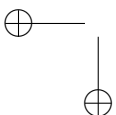
Indice

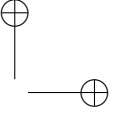
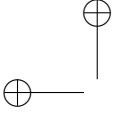
1	Introduzione	7
1.1	Precisiamo i termini	7
1.2	Gradiente di uno scalare	9
1.3	Flusso di calore	13
1.4	Prima equazione costitutiva	14
1.5	Equazione di bilancio	15
1.6	Seconda equazione costitutiva	17
1.7	Equazione fondamentale	18
1.8	Divergenza di un vettore	19
1.9	L'equazione di Poisson	21
1.10	Come descrivere le sorgenti	23
1.11	Le condizioni al contorno	24
2	Elementi finiti nell'unidimensionale	29
2.1	La divisione in elementi	31
2.2	Le funzioni di forma degli elementi	32
2.3	Le funzioni di forma nodali	33
2.4	Il metodo di Galerkin	35
2.5	La formazione del sistema algebrico	37
2.6	Il calcolo esplicito dei coefficienti	39
2.7	Un esempio semplicissimo	43
3	Elementi finiti nel bidimensionale	49
3.1	La divisione in elementi	49
3.2	Funzioni di forma degli elementi	50





3.3	Funzioni di forma nodali.	53
3.4	Il metodo di Galerkin	54
3.5	La formazione del sistema algebrico	56
3.6	Gradiente delle funzioni di forma.	57
3.7	Il calcolo dei coefficienti	59
A	Punti di Gauss	63
A.1	Intervallo canonico	65
A.2	Intervallo generico	69
A.3	Esempio	69
B	Regola di Cramer	71





Prefazione

Questo libretto si propone di fornire una introduzione **elementare** al metodo degli elementi finiti. Con l'espressione **metodo degli elementi finiti** si intende un metodo per la risoluzione **numerica** di una equazione differenziale, sia essa alle derivate totali o parziali. Più precisamente si tratta di *un metodo per approssimare una equazione differenziale con un sistema di equazioni algebriche*.

Il termine elementare implica che

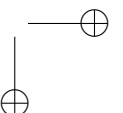
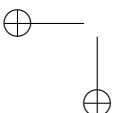
- non si presuppone la conoscenza della *formulazione variazionale*;
- ci limitiamo a campi *stazionari*;
- ci limitiamo a problemi in cui l'incognita è una grandezza *scalare*;
- ci limitiamo a problemi *piani*;
- ci limitiamo a maglie *triangolari*;
- ci limitiamo a funzioni di forma *lineari*.

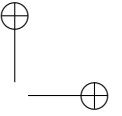
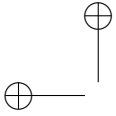
L'autore ritiene che in molte materie dell'insegnamento universitario manchino libri introduttivi **elementari**: sembra che gli autori temano che dicendo le cose in modo semplice la loro materia venga banalizzata e che loro stessi vengano considerati poco esperti. Il risultato di questo atteggiamento è che lo studente *fa difficoltà a capire i concetti* mentre la sua testa si riempie di formule. I concetti sono più importanti delle formule!

In un mare di formule c'è il naufragio dei concetti.

L'autore di questo libretto, che **non è un esperto** di elementi finiti, vuole trasmettere a chi studia le idee essenziali che lui stesso è riuscito a formarsi nello studio dell'argomento. Saranno gradite le osservazioni dei colleghi e degli studenti in vista delle prossime edizioni.

L'autore ringrazia la dott.ssa Francesca Cosmi per le osservazioni





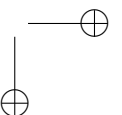
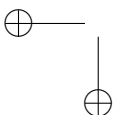
6

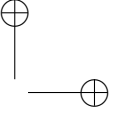
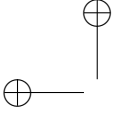
INDICE

riguardanti la leggibilità del testo e lo studente Alberto Granata che ha segnalato diverse lacune.

prof. Enzo Tonti

Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Trieste
Piazzale Europa 1 34127 Trieste, Italia.
e-mail: tonti@univ.trieste.it





Capitolo 1

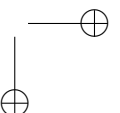
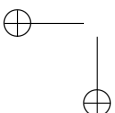
Introduzione

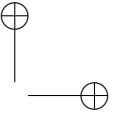
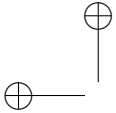
1.1 Precisiamo i termini

Definiamo alcuni termini che sono di uso comune nello studio dei campi.

Campo fisico. Col termine *campo fisico* si intende uno stato fisico dello spazio o della materia che vi è contenuta. Così la presenza della forza di gravità viene interpretata come dovuta alla presenza del *campo gravitazionale*; la presenza della attrazione tra due magneti viene attribuita all'esistenza di un *campo elettrico*; la conduzione del calore viene attribuita all'esistenza di un *campo termico*; ecc.

Campo stazionario. Un campo si dice *stazionario* quando in esso scorre un flusso il quale però non varia col tempo. Tipico è il campo termico (flusso di calore); il campo della conduzione elettrica (flusso di carica); il campo della diffusione (flusso di materia); ecc. Il termine stazionario si applica anche a campi variabili nel tempo in modo periodico: questo significa che in ogni punto del campo le grandezze variano ma riprendono il loro valore ad intervalli uguali di tempo. Questo è il caso di un'onda stazionaria che si propaga entro un mezzo materiale, quale il campo acustico, nel vuoto, come il campo elettromagnetico.





Campo statico. Un campo si dice *statico* quando in esso non c'è flusso di qualcosa, né di massa, né di energia, né di carica, ovvero nulla fluisce e tutte le grandezze che lo descrivono sono costanti nel tempo.

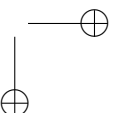
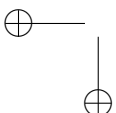
Campo variabile. Quando il campo non è né statico né stazionario, allora si dice *variabile*. Tali sono il campo termico non stazionario, il campo elettromagnetico, il campo elastodinamico, il campo fluidodinamico, ecc.

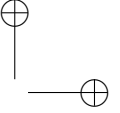
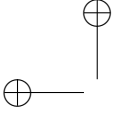
Le sorgenti. Ogni campo è generato da delle *sorgenti*. Queste sorgenti possono trovarsi nella regione in cui il campo è considerato o essere esterne ad esso. In quest'ultimo caso la loro influenza sulla regione considerata si descrive mediante le *condizioni al contorno* come preciseremo più avanti.

Potenziale del campo. Lo studio di un campo ha come fine la determinazione di una o più grandezze scalari o vettoriali che dipendono dal posto e dal tempo e che prendono i nomi di *potenziali* del campo.

I campi più comuni sono:

- il *campo termico* nel quale le sorgenti sono le **fonti di calore** e come potenziale la **temperatura** $T(t, x, y)$;
- il *campo elettrostatico* che ha come sorgenti le **cariche elettriche** e come potenziale è il **potenziale elettrico** $\varphi(x, y)$;
- il *campo magnetostatico*, quale quello prodotto da un magnete permanente o da un elettromagnete percorso da corrente costante, che ha come sorgenti le **correnti elettriche** ed il cui potenziale è un vettore $\vec{A}(x, y)$, che prende il nome di **potenziale vettore**;
- il *campo elastico*, ovvero il campo di un corpo continuo deformabile elasticamente, che ha come sorgenti le **forze** e come potenziale lo **spostamento** $\vec{u}(t, x, y)$ di ogni punto del corpo deformabile;





1.2. GRADIENTE DI UNO SCALARE

9

- il *campo fluidodinamico*, ovvero quello di un fluido, perfetto o viscoso, che ha come sorgenti le **forze** e come potenziali sia la **velocità** $\vec{u}(t, x, y)$ che la **pressione** $p(t, x, y)$;
- il *campo elettromagnetico*, che ha come sorgenti le **cariche** e le **correnti elettriche** e come potenziali sia il **potenziale vettore** $\vec{A}(t, x, y)$ che il **potenziale scalare** $\varphi(t, x, y)$.

Problema fondamentale. Il problema fondamentale di un campo è il seguente:

*assegnata la regione entro la quale si vuole considerare il campo;
assegnato l'intervallo di tempo entro il quale si vuole considerare il campo;
precisata la natura dei materiali contenuti entro la regione;
assegnate la posizione e l'intensità delle sorgenti;
precisate le condizioni al contorno della regione;
determinare in ogni punto ed in ogni istante i potenziali del campo.*

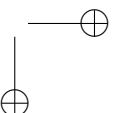
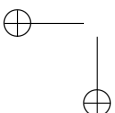
Leggi del campo. Per risolvere il problema fondamentale occorre conoscere le *leggi del campo*. Queste leggi esprimono il legame (legame=legare=lex=legis) tra le grandezze che descrivono il campo. Il legame tra le grandezze è espresso da **equazioni differenziali**.

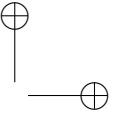
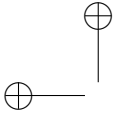
In generale tali equazioni non si riescono a risolvere in forma esplicita (ovvero analitica) e occorre ricorrere a metodi numerici. Il primo metodo numerico della storia è stato quello detto delle *differenze finite*. Intorno al 1960 è nato il metodo degli *elementi finiti*.



1.2 Gradiente di uno scalare

Con riferimento alla figura (1.1), se si versa dell'acqua su un piano inclinato questa scende portandosi dalle zone a quota maggiore a quelle a quota minore. Inoltre l'acqua fluirà tanto più velocemente quanto maggiore sarà la pendenza del piano. Per caratterizzare la pendenza di





un piano basta valutare l'angolo α che il piano forma con quello orizzontale. La pendenza può essere espressa dando la tangente dell'angolo che il piano inclinato forma con il piano orizzontale: scriveremo $g = \tan(\alpha)$. Tale tangente è anche uguale all'incremento di quota per unità di percorso nel piano orizzontale.

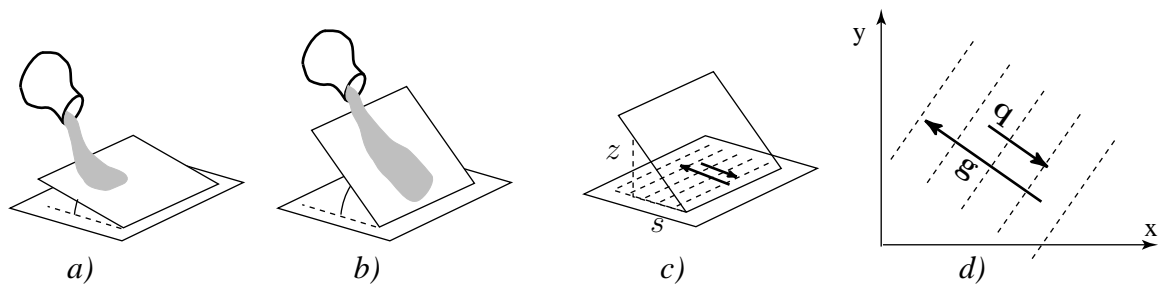


Figura 1.1. La discesa dell'acqua su un piano inclinato è tanto più rapida quanto più il piano è inclinato. Se non vi fossero l'adesione e le asperità del piano l'acqua scenderebbe lungo le linee di pendio del piano.

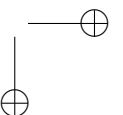
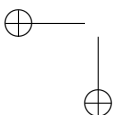
{scivola}

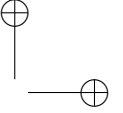
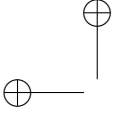
Dal momento che un piano in coordinate cartesiane si descrive mediante una equazione del tipo

$$\{EF12\} \quad z(x, y) = a + bx + cy \quad (1.1)$$

si vede che la tangente dell'angolo α è data dall'incremento della funzione z per unità di lunghezza misurata sul piano orizzontale e nella direzione ortogonale alle linee di livello.

Questa pendenza si visualizza sul piano orizzontale dal fatto che le linee di livello corrispondenti a quote che differiscono di una unità, ad esempio di un metro, sono più vicine (pendenza maggiore) o più lontane (pendenza minore). Rimane però da indicare anche la direzione delle linee di livello o, che è più comodo, la direzione della normale alle linee di livello. Infatti le linee del piano inclinato che hanno la massima pendenza, dette *linee di pendio*, sono ortogonali alle linee di livello. Queste due informazioni, entità della pendenza e direzione delle linee di pendio si possono riunire in un vettore che abbia la direzione delle linee di pendio ed il cui modulo sia uguale all'incremento per





1.2. GRADIENTE DI UNO SCALARE

11

unità di lunghezza. Questo vettore prende il nome di **gradiente** della funzione che rappresenta il piano inclinato. Il vettore gradiente quindi, che appartiene al piano orizzontale x, y , rappresenta la pendenza del piano inclinato sia in direzione che in intensità.

L'incremento della funzione z dato dalla (1.1), indicato con Δz ha come sua parte lineare il differenziale della funzione, ovvero dz . Essendo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (1.2) \quad \{\text{EF14}\}$$

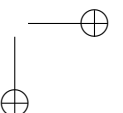
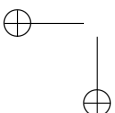
possiamo scrivere il differenziale dz come prodotto scalare di due vettori: il vettore \vec{g} di componenti $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ ed il vettore $d\vec{r}$ di componenti dx, dy :

$$dz = \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.3) \quad \{\text{EF53}\}$$

. Dal momento che il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo tra essi formato, il massimo incremento di z si realizza quando $d\vec{r}$ ha la stessa direzione di \vec{g} . Ne viene che il vettore

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} \quad (1.4) \quad \{\text{EF16}\}$$

è il vettore gradiente. Come riprova si osservi che se $d\vec{r}$ giace lungo la linea di livello passante per il punto P si ha $\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$ e quindi $dz = 0$ come deve essere.



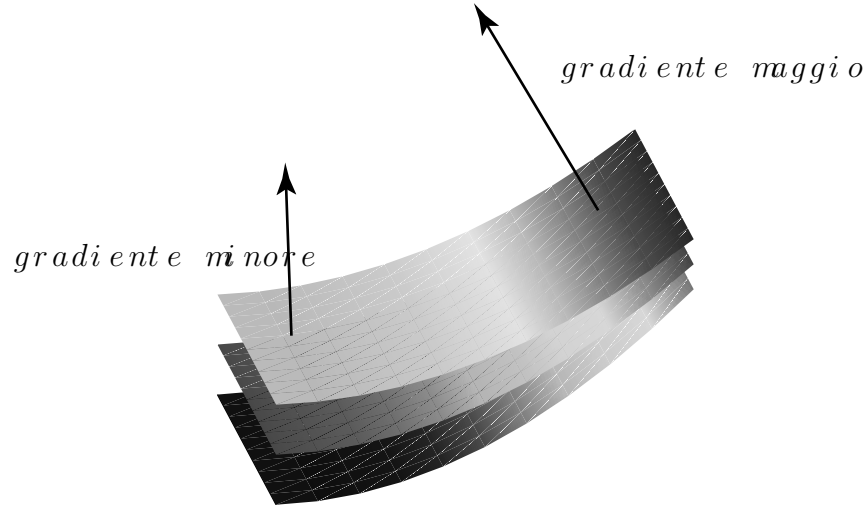


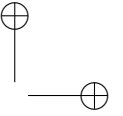
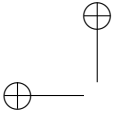
Figura 1.2. Il gradiente di una funzione è perpendicolare alla superficie equipotenziale passante per il punto. {equi 1}

Fatta questa considerazione preliminare per introdurre la nozione di gradiente, consideriamo la conduzione termica all'interno di un corpo. Nel corpo si possono considerare le **superfici isoterme** corrispondenti, ad esempio, a 10°C , 20°C , 30°C , È intuitivo che la rapidità di variazione della temperatura sarà tanto maggiore quanto più le superfici sono più vicine. Si può creare allora un vettore che descriva in direzione ed intensità la direzione di massima variazione della temperatura per unità di percorso. Tale vettore, intuitivamente, risulterà in ogni punto della regione perpendicolare alla superficie isoterma passante per il punto. L'incremento della funzione $T(\vec{r})$ indicato con ΔT ha come sua parte lineare il differenziale della funzione, ovvero dT . Essendo

$$\{\text{EF41}\} \quad dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

possiamo scrivere il differenziale dz come prodotto scalare di due vettori: il vettore \vec{g} di componenti $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ ed il vettore $d\vec{r}$ di componenti dx , dy , dz :

$$\{\text{EF15}\} \quad dT = \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.6)$$



. Dal momento che il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo tra essi formato, il massimo incremento di z si realizza quando $d\vec{r}$ ha la stessa direzione di \vec{g} . Ne viene che il vettore

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad (1.7) \quad \{\text{EF45}\}$$

è il vettore gradiente. Come riprova si osservi che se $d\vec{r}$ giace nella superficie ortogonale passante per il punto P si ha $\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$ e quindi $dz = 0$ come deve essere.

1.3 Flusso di calore

La quantità di calore Q che nell'unità di tempo attraversa un elemento di superficie piana A con baricentro in un punto \vec{r} dipenderà sia dal punto che dalla giacitura che dall'estensione dell'elemento di superficie: scriveremo allora $Q(\vec{r}, \vec{n}, A)$.

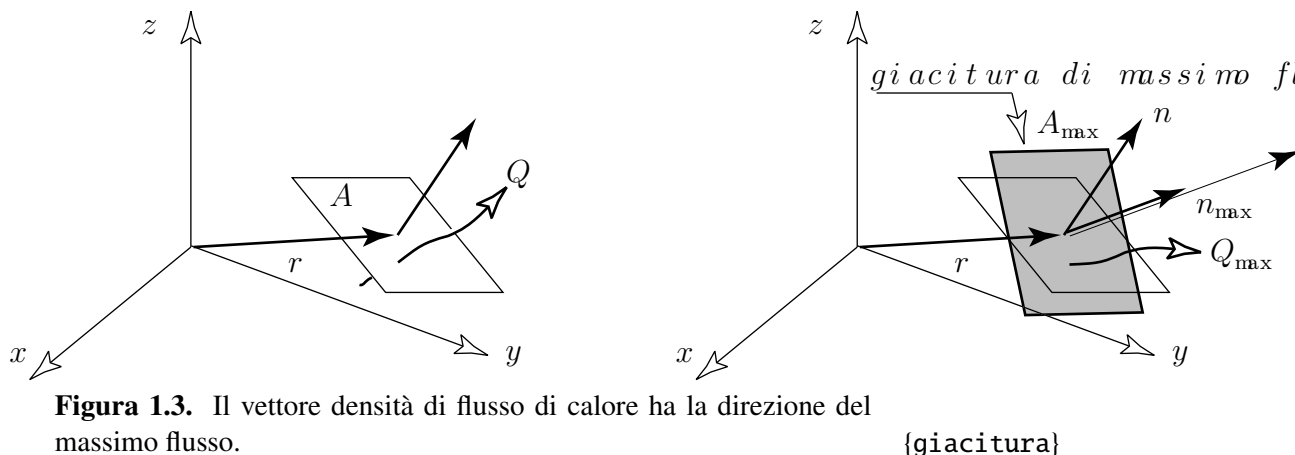
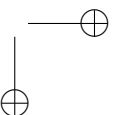
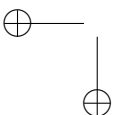
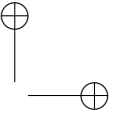
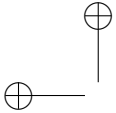


Figura 1.3. Il vettore densità di flusso di calore ha la direzione del massimo flusso.

Considerando diverse giaciture si elementi piani passanti per il punto \vec{r} , il flusso per unità di area Q/A varierà. È intuitivo che esista una giacitura per la quale tale rapporto risulterà massimo: indichiamo con \vec{n}_{\max} il versore di tale direzione orientata e con $(Q/A)_{\max}$ il valore massimo del rapporto.





Si può istituire un vettore che ha la direzione del vettore \vec{n}_{\max} . Per ottenere una grandezza che dipenda solo dal punto dovremo considerare il limite di tale rapporto: scriveremo dunque

$$\{\text{EF19}\} \quad \vec{q}(\vec{r}) = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{A} \right)_{\max} \vec{n}_{\max}. \quad (1.8)$$

Il vettore $\vec{q}(\vec{r})$ così definito prende il nome di *vettore densità di flusso di calore*. Ne viene che il flusso attraverso una superficie S sarà la somma dei flussi passanti attraverso gli elementi dS che compongono la superficie, ovvero

$$\{\text{EF20}\} \quad Q[S] = \int_S \vec{q}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS \quad (1.9)$$

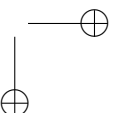
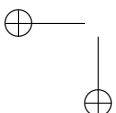
1.4 Prima equazione costitutiva

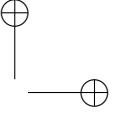
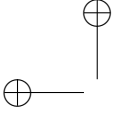
Dal momento che il calore va dalle regioni a temperatura maggiore verso quelle di temperatura minore ci possiamo attendere che tanto maggiore è il gradiente di temperatura, tanto maggiore sarà la quantità di calore che fluisce per unità di area. Si sperimenta la seguente *legge costitutiva* che lega il vettore densità di flusso di calore con il gradiente di temperatura:

$$\{\text{EF46}\} \quad \vec{q} = -k \vec{g}. \quad (1.10)$$

La costante k si chiama *conducibilità termica*. Il segno meno è richiesto dal fatto che il calore fluisce nel senso delle temperature decrescenti mentre il gradiente va nel verso delle temperature crescenti. Enunciata a parole questa legge dice che *la quantità di calore che transita attraverso un elemento di superficie piana tangente ad una superficie isoterma per unità di area e per unità di tempo è proporzionale al salto di temperatura per unità di lunghezza misurato perpendicolarmente alla superficie*.¹

¹ Questa è la legge elementare della conduzione termica introdotta dal fisico francese Biot nel 1804 ed usata estensivamente da Jean Baptiste Joseph Fourier, fisico-matematico francese che la usò nel suo celebre libro *Théorie analytique de la chaleur*, pubblicato nel 1822. È nota come legge elementare di Fourier.





1.5 Equazione di bilancio

Abbiamo introdotto il vettore gradiente \vec{g} della temperatura come vettore che indica in ogni punto la direzione perpendicolare alla superficie isoterma passante per il punto e che ha come modulo l'incremento di temperatura per unità di percorso in direzione perpendicolare all'isoterma.

Abbiamo quindi introdotto il vettore densità di flusso di calore \vec{q} che indica in ogni punto la direzione di massima quantità di calore per unità di area e che ha come modulo il calore per unità di area (dopo aver fatto il limite per l'area che tende a zero).

Abbiamo quindi scritto la relazione sperimentale (ed intuitiva) che lega i due vettori nel caso che il materiale sia isotropo².

Ora, per completare la trattazione della conduzione termica, dobbiamo esprimere il bilancio termico. Vediamo di che si tratta. Consideriamo un volume interno alla regione e supponiamo che in essa si generi del calore: questo in parte fluirà verso l'esterno ed in parte rimarrà nel volume aumentandone la temperatura. Si pensi ad una stanza (il volume), ad un calorifero (la sorgente termica). Se le finestre sono chiuse la quantità di calore che esce è trascurabile rispetto a quella che rimane nella stanza e quindi la temperatura della stanza cresce. Se invece le finestre sono aperte il calore generato esce dalla stanza e la temperatura della stanza rimane pressoché costante.

Il bilancio termico si esprime nella relazione

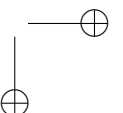
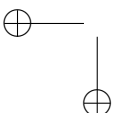
$$\text{calore generato} = \text{calore accumulato} + \text{calore uscente.} \quad (1.11) \quad \{\text{EF48}\}$$

ovvero

$$Q_{gen} = Q_{acc} + Q_{usc} \quad (1.12) \quad \{\text{EF30}\}$$

Esaminiamo i tre tipi di calore.

²Un materiale si dice **isotropo** quando le proprietà fisiche non dipendono dalla direzione mentre si dice **omogeneo** quando le sue proprietà fisiche non dipendono dal posto. Tipicamente il legno, dotato di fibre, non è né omogeneo né isotropo. Tra i legni ve ne sono alcuni, come il *faggio* e l'*ontano* che sono abbastanza omogenei ed isotropi e perciò adatti alla tornitura.



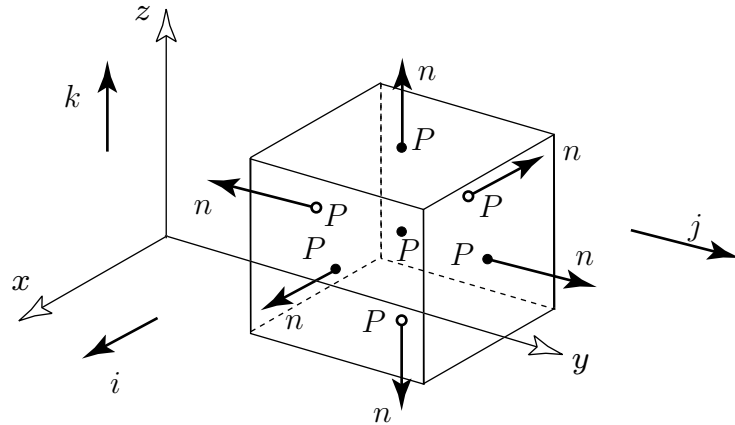


Figura 1.4. Il parallelepipedo infinitesimo utilizzato per scrivere l'equazione di bilancio in coordinate cartesiane. {grad-div}

Calore generato. Se la generazione di calore è distribuita con una densità σ la quantità di calore generato entro un cubetto infinitesimo di lati dx, dy, dz in un intervallo infinitesimo di tempo dt è data da:

$$\{\text{EF31}\} \quad Q_{gen} = \sigma dx dy dz dt \quad (1.13)$$

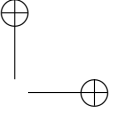
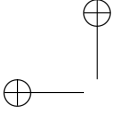
Calore accumulato. Il calore accumulato produce un aumento dell'energia termica U entro il volume:

$$\{\text{EF32}\} \quad Q_{acc} = d_t U = d_t [u(x, y, z, t) dx dy dz] = \frac{\partial u}{\partial t} dt dx dy dz \quad (1.14)$$

avendo indicato con $d_t U$ la variazione nel tempo dell'energia interna. Si noti che un differenziale totale si può scrivere come somma dei differenziali parziali nella forma

$$\{\text{EF36}\} \quad du(x, y) = d_x u(x, y) + d_y u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (1.15)$$

in cui abbiamo fatto uso della notazione $d_x u, d_y u$ per i differenziali parziali che era in uso nella matematica del secolo XIX.



Calore uscito. Il calore uscito dal contorno del volume considerato si può esprimere come somma dei calori uscenti dalle diverse facce che compongono il contorno del volume. Dal momento che il volume considerato è infinitesimo, ciascuna di queste facce ha area infinitesima ed il calore che esce è dato da

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{usc} &= +\vec{q}(x+dx, y, z, t) \cdot \vec{i}(dydz)dt - \vec{q}(x, y, z, t) \cdot \vec{i}(dydz)dt \\ &= +\vec{q}(x, y+dy, z, t) \cdot \vec{j}(dxdz)dt - \vec{q}(x, y, z, t) \cdot \vec{j}(dxdz)dt \\ &= +\vec{q}(x, y, z+dz, t) \cdot \vec{k}(dxdy)dt - \vec{q}(x, y, z, t) \cdot \vec{k}(dxdy)dt \\ &= \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} \cdot \vec{k} \right] dxdydzdt \\ &= \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] dxdydzdt \end{aligned} \right. \quad (1.16) \quad \{\text{EF33}\}$$

Fatte queste premesse l'equazione di bilancio (1.12) si può scrivere

$$\sigma dxdydzdt = \frac{\partial u}{\partial t} dxdydzdt + \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] dxdydzdt \quad (1.17) \quad \{\text{EF34}\}$$

donde, eliminando i differenziali si ottiene

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad (1.18) \quad \{\text{EF35}\}$$

Questa è l'equazione di bilancio scritta in forma differenziale, ovvero valida per un parallelepipedo infinitesimo.

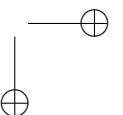
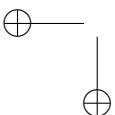
La funzione

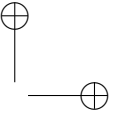
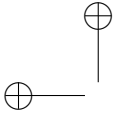
$$\phi(x, y, z) \triangleq \frac{\partial q_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial q_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial q_z(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.19) \quad \{\text{EF44}\}$$

prende il nome di *divergenza* del vettore $\vec{q}(x, y, z)$ e viene indicata con il simbolo $\nabla \cdot \vec{q}$.

1.6 Seconda equazione costitutiva

Quando un corpo si riscalda aumenta la sua energia interna e quindi aumenta la sua temperatura. L'incremento di energia è legato all'inc-





mento della temperatura dalla relazione

$$\Delta U = C\Delta T \quad (1.20) \quad \{\text{EF67}\}$$

in cui U è l'energia interna, T la temperatura e C la *capacità termica*. Dividendo ambo i membri per il volume, ed indicando con u la *densità* di energia interna, si ottiene la relazione

$$\{\text{EF68}\} \quad \Delta u = \frac{C}{V}\Delta T \quad (1.21)$$

avendo indicato con C/V la capacità termica per unità di volume. È però più usata la capacità termica per unità di massa che prende il nome di *calore specifico*. Questo porta a scrivere $C/V = (C/M)(M/V) = c\rho$. Ne viene che l'equazione costitutiva (1.21) si scrive

$$\{\text{EF69}\} \quad \Delta u = \rho c\Delta T \quad (1.22)$$

Se il volume è infinitesimo, ricordando l'equazione (1.14) scriveremo

$$\{\text{EF39}\} \quad d_t u = \rho c d_t T = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (1.23)$$

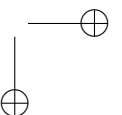
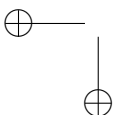
in cui c è il calore specifico (= capacità termica per unità di massa) del materiale contenuto entro il volume dV e ρ è la densità del materiale. Si osservi che il prodotto ρc dà il calore per unità di volume e per grado centigrado.

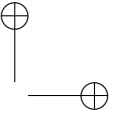
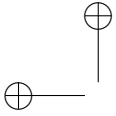
1.7 Equazione fondamentale

Combinando le due equazioni costitutive (1.10) ed (1.23) e l'equazione (1.4) con l'equazione di bilancio si ottiene

$$\{\text{EF50}\} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \sigma. \quad (1.24)$$

che è l'equazione **fondamentale** della conduzione termica.





1.8. DIVERGENZA DI UN VETTORE

19

Nel caso particolare in cui non vi sia generazione distribuita di calore l'equazione si riduce a

$$\text{(EF49)} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0 \quad \textit{Fourier} \quad (1.25)$$

nota come equazione di Fourier. Se la conduzione termica è a regime, ovvero se la temperatura non varia col tempo la (1.24) si riduce a

$$-k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \sigma \quad \textit{Poisson} \quad (1.26) \quad \text{(EF42)}$$

nota come equazione di Poisson³ Nel caso in cui anche la sorgente manchi⁴, l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \textit{Laplace} \quad (1.27) \quad \text{(EF43)}$$

che prende il nome di equazione di Laplace⁵.

1.8 Divergenza di un vettore

Facendo riferimento alla figura (1.4) possiamo dare una definizione intrinseca, cioè indipendente dal sistema di coordinate, del gradiente di uno scalare e della divergenza di un vettore è espressa dalle formule seguenti:

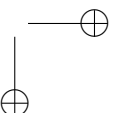
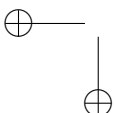
$$\text{grad } u \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} u(P) d\vec{S}}{V} \quad \text{div } \vec{q} \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} \vec{q}(P) \cdot d\vec{S}}{V} \quad (1.28) \quad \text{(F19)}$$

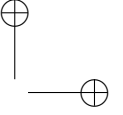
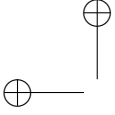
essendo P un punto della superficie S ; V un volume generico; ∂V la superficie che forma il contorno del volume V e infine $d\vec{S}$ il vettore infinitesimo normale all'elemento di superficie piana dS e diretto verso

³Dal nome del fisico-matematico francese Siméon Denis Poisson (1781-1840).

⁴Ciò vuol solo dire che le sorgenti di calore sono *esterne* alla regione entro la quale si considera la conduzione termica.

⁵Dal nome del fisico-matematico francese Pierre Simon de Laplace (1749-1827).





l'esterno del volume. Quando le operazioni indicate da questi due integrali vengono eseguite su un parallelepipedo con gli spigoli paralleli ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, come indicato in figura (1.4), si perviene alle espressioni cartesiane del gradiente e della divergenza. Infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } u = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{k=1}^6 u(P_k) \vec{n}_k \varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[u(x + \frac{1}{2}\varepsilon, y, z) - u(x - \frac{1}{2}\varepsilon, y, z) \right] \vec{i} + \dots + \dots \\ \text{div } \vec{q} = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{k=1}^6 \vec{q}(P_k) \cdot \vec{n}_k \varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[q_x(x + \frac{1}{2}\varepsilon, y, z) - q_x(x - \frac{1}{2}\varepsilon, y, z) \right] + \dots + \dots \end{array} \right. \quad (1.29)$$

{F20}

da cui ⁶

$$\text{grad } u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{div } \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (1.30)$$

{F21}

La scrittura in coordinate cartesiane suggerisce l'introduzione di un operatore vettoriale

$$\nabla = +\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.31)$$

{F22}

cui si è stato dato il nome *nabla*. Questo operatore consente di scrivere il gradiente nella forma

$$\text{grad } u = \left[\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] u = \nabla u \quad (1.32)$$

{F23}

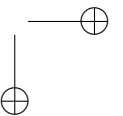
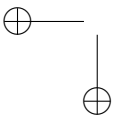
e la divergenza della forma

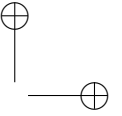
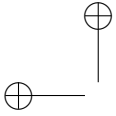
$$\text{div } \vec{q} = \left[+\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}] = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{q} \quad (1.33)$$

{F24}

avendo applicato *formalmente* la regola del prodotto scalare tra un operatore vettoriale ed un vettore. Si ottiene in tal modo una notazione

⁶I simboli grad e div costituiscono la notazione *figurata* del vettore gradiente e dello scalare divergenza.





1.9. L'EQUAZIONE DI POISSON

21

vettoriale del gradiente e della divergenza. Le tre equazioni ((1.7), 1.10), (1.19) possono scriversi con notazione intrinseca in uno dei modi seguenti:

$$\{F25\} \quad \vec{v} = \text{grad } u \quad \vec{q} = -k \vec{v} \quad \text{div } \vec{q} = \rho. \quad (1.34)$$

oppure

$$\vec{v} = \nabla u \quad \vec{q} = -k \vec{v} \quad \nabla \cdot \vec{q} = \rho. \quad (1.35) \quad \{F26\}$$

Come componendo tra loro le tre equazioni si ottiene l'equazione (1.39), così componendo le tre equazioni nella forma (1.34) si ottiene l'equazione

$$-k \text{div grad } u = f \quad \text{che si scrive anche} \quad -k \Delta u = \rho \quad (1.36) \quad \{F27\}$$

Il simbolo Δ si legge **laplaciano**. Se si compongono le stesse tre equazioni scritte in notazione vettoriale (1.35) si ottiene l'equazione

$$-k \nabla \cdot \nabla u = \rho \quad \text{che si scrive anche} \quad -k \nabla^2 u = \rho. \quad (1.37) \quad \{F28\}$$

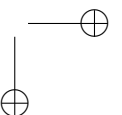
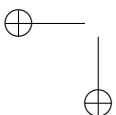
Il simbolo ∇^2 si legge *nabla quadro*. In conclusione si hanno le tre scritture equivalenti:

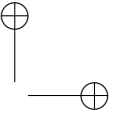
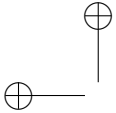
$$\left\{ \begin{array}{ll} -k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \rho. & \text{in coordinate cartesiane} \\ -k \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u = \rho & \\ \quad \quad \quad -k \Delta u = \rho & \text{in forma intrinseca} \\ \quad \quad \quad -k \nabla^2 u = \rho & \text{in forma intrinseca} \end{array} \right. \quad (1.38) \quad \{F29\}$$

1.9 L'equazione di Poisson

In molte teorie di campo della fisica, assegnata la **sorgente** del campo descritta da una funzione $\rho(x, y, z)$ si richiede di determinare il **potenziale** del campo descritto da una funzione $u = u(x, y, z)$ legato alla sorgente dalla equazione differenziale

$$-k \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u(x, y, z) = \rho(x, y, z) \quad (1.39) \quad \{F14\}$$





Questa equazione prende il nome di **equazione di Poisson**.

Una equazione di questo tipo si presenta nello studio di diversi campi. Ricordiamo i principali.

Conduzione termica:

$$\{\text{EF08}\} \quad \vec{p} = \text{grad } T \quad \vec{q} = -k \vec{p} \quad (1.40)$$

essendo T la *temperatura*, \vec{p} il *gradiente termico*, k la *conducibilità termica*, \vec{q} il *vettore flusso termico* [2, p.245].

Diffusione di un soluto in un solvente:

$$\{\text{EF09}\} \quad \vec{p} = \text{grad } \omega \quad \vec{j} = -\rho D \vec{p} \quad (1.41)$$

essendo ω la *frazione di massa* del soluto, D la *diffusività*, ρ la *densità* del solvente, \vec{j} il *vettore flusso di massa* [2, p.506].

Campo elettrostatico:

$$\{\text{EF11}\} \quad \phi = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.42)$$

essendo \vec{E} il *vettore campo elettrico*, \vec{D} il *vettore induzione elettrica*⁷, ϵ la *costante dielettrica*[14].

Campo magnetostatico:

$$\{\text{EF40}\} \quad \phi_M = \int_P^\infty \vec{H} \cdot d\vec{L} \quad \vec{H} = -\text{grad } \phi_M \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.43)$$

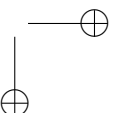
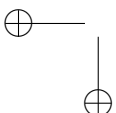
essendo \vec{H} il *vettore campo magnetico*, \vec{B} il *vettore induzione magnetica*, μ la *permeabilità* [14, p.191].

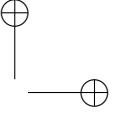
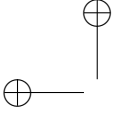
Dinamica dei fluidi perfetti: Nel moto irrotazionale si ha

$$\{\text{EF13}\} \quad \phi = \int_{P_0}^P \vec{v} \cdot d\vec{L} \quad \vec{v} = \text{grad } \phi \quad \vec{q} = \rho \vec{v} \quad (1.44)$$

essendo \vec{v} la *velocità*, ρ la *densità* del fluido, ϕ il *potenziale delle velocità*, \vec{q} la *portata specifica*. Si noti che in questa equazione manca il segno -.

⁷Detto anche spostamento dielettrico.





1.10 Come descrivere le sorgenti

Campo termico. Le sorgenti termiche sono i generatori di calore quali le resistenze elettriche; i caloriferi; i frigoriferi; le fiamme, quali la fiamma ossidrica, le fornaci, i fornelli; le combustioni nucleari nell'interno di un reattore nucleare; gli spot laser, ecc. Raramente le sorgenti di calore sono distribuite sull'intera regione Ω ove si considera il campo: in questi casi occorre conoscere la quantità di calore erogata dalla sorgente nell'unità di tempo e nell'unità di volume. Indicheremo con $\rho(t, x, y, z)$ tale grandezza.

Più spesso la sorgente è contenuta entro una regione V contenuta in Ω e di essa si conosce l'ammontare totale di calore per unità di tempo uscente dalla regione. In questi casi si può considerare la regione V esterna ad Ω e considerare il bordo di V , che si indica con ∂V , come una parte del bordo di Ω , come indicato in figura (??).

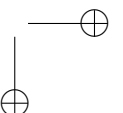
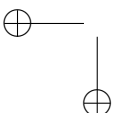


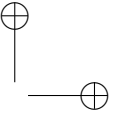
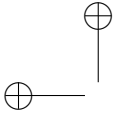
Figura 1.5. fuoco Una sorgente distribuita entro una regione V può essere considerata esterna alla regione del campo.

{num}

Si può allora considerare la potenza termica Q (in watt) che attraversa il contorno ∂V e ipotizzare che essa sia uniformemente distribuita sulla superficie con densità σ (watt/metro²). Ne viene che la superficie del volume V diventa una parte del contorno della regione Ω e quindi la grandezza σ indica il calore entrante per unità di superficie attraverso questa parte del contorno. In altre parole l'effetto della sorgente si risente tramite le condizioni al contorno.

Campo elettrico. È raro che vi sia una carica elettrica distribuita entro tutta la regione con densità $\rho(x, y, z)$: è più facile che si trovi distribuita sulle superfici di conduttori. Così se consideriamo la superficie di una scatola metallica chiusa la carica si distribuisce sulla superficie con una densità variabile da punto a punto della superficie ripettando





la legge che la superficie di un conduttore sia equipotenziale. Nel caso particolare che la superficie metallica sia sferica e in assenza di altri corpi conduttori, per ragioni di simmetria, la densità di carica si distribuisce uniformemente sulla superficie. Se però la superficie chiusa ha forma generica o se vi sono altri conduttori nelle vicinanze la densità di carica è, a priori, sconosciuta. In questo caso conviene comportarsi come descritto nel paragrafo precedente considerando la scatola metallica (o le scatole metalliche) come esterne alla regione ω e la densità di carica, a priori sconosciuta, come distribuita sul contorno della regione Ω . Anche in questo caso quindi la sorgente si fa sentire attraverso le condizioni al contorno.

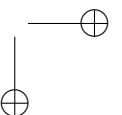
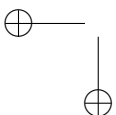
Quanto al fatto essenziale che la densità di carica sul contorno della regione Ω non sia conosciuta indica che occorre procedere per tappe successive. Si può dapprima ipotizzare che su ciascun conduttore la densità sia uniforme e andare a calcolare il campo risolvendo l'equazione differenziale di Laplace, come vedremo dopo. Successivamente dopo aver constatato che il potenziale elettrico non è costante sulla superficie di ciascun conduttore si procede alla assegnazione di una nuova densità di carica superficiale usando opportuni criteri al fine di avvicinarsi ad una distribuzione di carica che renda la superficie di ogni conduttore equipotenziale. In questo processo occorre sapere quale è la carica presente su ogni conduttore.

1.11 Le condizioni al contorno

Consideriamo la conduzione termica stazionaria in un campo **piano**. Questa è descritta dall'equazione di Poisson che, in coordinate cartesiane, ha la forma esplicita

$$\{F30\} \quad -k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \rho. \quad (1.45)$$

La regione bidimensionale Ω che prenderemo in considerazione prende il nome di *dominio* del problema. Sia la sorgente $\rho(x, y)$ che la temperatura $u(x, y)$ sono definiti entro la regione Ω . Il contorno della regione



sarà indicato con $\partial\Omega$. Tale contorno si può dividere in due o più parti in ciascuna delle quali o è assegnato il valore della temperatura o è assegnato il calore entrante.

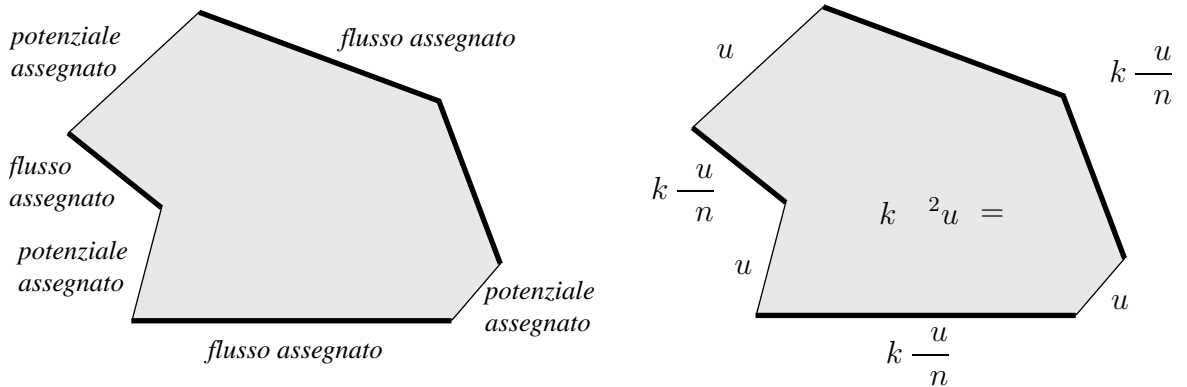


Figura 1.6. Il contorno della regione si può dividere in parti: in alcune parti è assegnato il valore della funzione, nelle rimanenti il valore del {contorno} flusso.

Il vettore \vec{q} permette di calcolare il flusso⁸ Q attraverso una superficie piana infinitesima di area A mediante la formula

$$\frac{Q}{A} = \vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{v} \cdot \vec{n} = -k \nabla u \cdot \vec{n} = -k \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (1.46) \quad \{F31\}$$

Dal momento che su una parte del contorno si intende assegnato il flusso entrante, ad esempio nullo se c'è una parete isolante, l'assegnazione della densità di calore entrante Q/A , come conseguenza dell'ultima equazione, equivale all'assegnazione della *derivata normale* al contorno cioè la derivata della temperatura in direzione normale al contorno.

Con riferimento alla figura (1.7) ricordiamo che la derivata di una funzione in una direzione individuata da un versore \vec{r} è definita dalla

⁸Con l'espressione *flusso termico* intendiamo il calore che passa per unità di tempo.

espressione

$$\frac{\partial u}{\partial t} \triangleq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{a} \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{b} \frac{b}{a} \equiv \nabla u \cos \alpha \equiv \nabla u \cdot \vec{t} \quad (1.47) \quad \{\text{F32}\}$$

ovvero: *la derivata di una funzione lungo una direzione orientata è uguale al prodotto scalare del gradiente della funzione per il versore della direzione.*

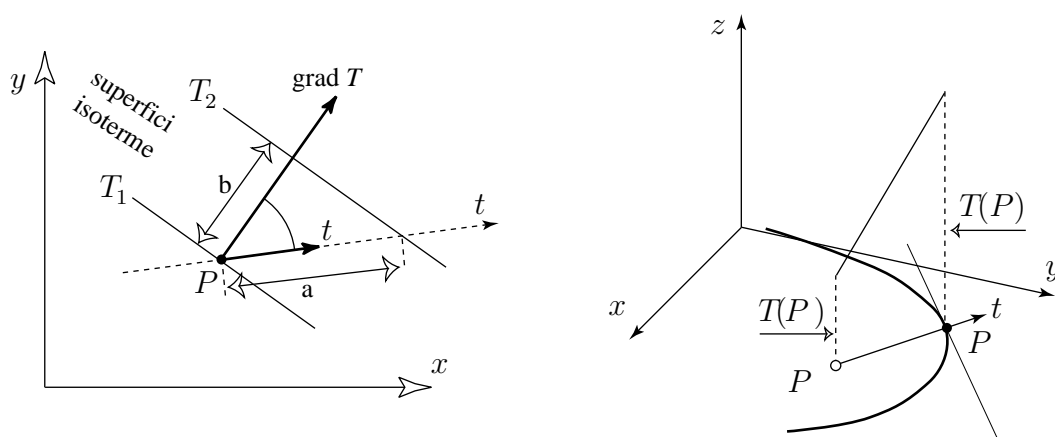


Figura 1.7. sinistra) La derivata direzionale; destra) la derivata normale in un punto del contorno.
{derivata-normale}

Consideriamo il problema di determinare la funzione $u(x, y)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k \nabla^2 u(x, y) = \rho(x, y) \\ u(x, y) = \text{assegnata su una parte del contorno} \\ -k \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \text{assegnata sulla parte rimanente del contorno} \end{array} \right. \quad (1.48) \quad \{\text{F33}\}$$

Le due condizioni ausiliarie prendono il nome di **condizioni al contorno**. A causa della presenza di due tipi di condizioni al contorno, questo problema si dice **problema misto**. Un problema è costituito dall'insieme di una equazione e delle condizioni al contorno.

Con riferimento alla conduzione termica si dà il caso che su una parte del contorno sia assegnata la temperatura e sulla parte rimanente sia assegnato il calore entrante. Un caso particolare si ha quando una parte del contorno sia a contatto con termostati⁹ e che parte rimanente sia formata da pareti adiabatiche o isolanti: in questo caso non transita calore. La figura (1.8a) illustra questo caso.

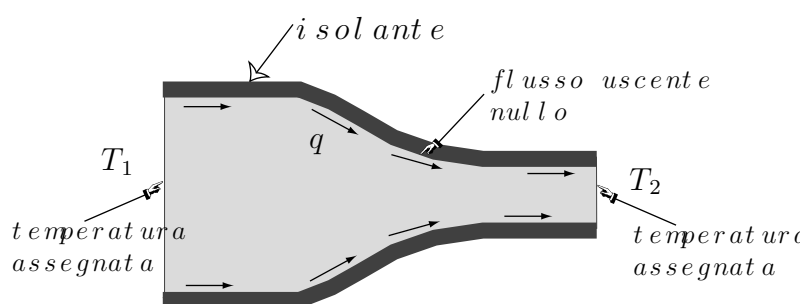


Figura 1.8. Conduzione del calore entro un solido delimitato da due {adiabatico} contorni adiabatici e due isoterme.

Come caso particolare sull'intero contorno può essere noto il valore della funzione: si parla allora **problema di Dirichlet**.

⁹Con questo nome si intende un recipiente a temperatura uniforme, cioè uguale in tutti i suoi punti, che mantenga la sua temperatura costante nel tempo. Questo può essere dovuto al fatto che il recipiente è sufficientemente grande da non risentire del calore scambiato, ad esempio un lago nei riguardi dei suoi affluenti, o che è dotato di un dispositivo che assorbe ed eroga calore in modo da mantenere la temperatura costante, come un frigorifero.

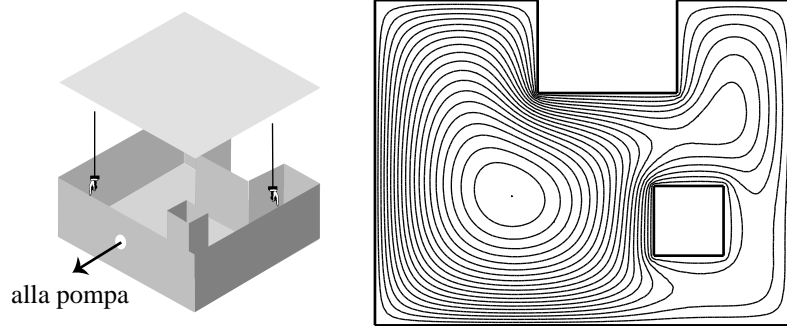


Figura 1.9. Un esempio di soluzione del problema di Dirichlet: la funzione è nulla su tutto il contorno e c'è un carico distribuito uniformemente, dovuto ad una depressione. Le linee indicate sono le linee di livello.

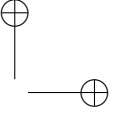
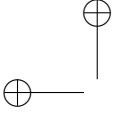
{membrana}

Il caso complementare è che sull'intero contorno sia noto il valore della derivata normale della funzione: si parla allora del **problema di Neumann**. La tabella (1.49) riassume la nomenclatura introdotta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{problema di Dirichlet} \\ -k \Delta u = \rho \\ u|_{\partial\Omega} = \text{assegnato} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{problema di Neumann} \\ -k \Delta u = \rho \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \text{assegnato} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{problema misto} \\ -k \Delta u = \rho \\ u|_A = \text{assegnato} \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_B = \text{assegnato} \\ A \cup B = \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.49)$$

{KE56}

Come capita sempre nella vita, è facile porre un problema... ma il difficile è il trovare la soluzione! Cosa fare se la regione ha una forma generica, oppure se la funzione $\rho(x, y)$ non ha una semplice forma analitica, o addirittura se è assegnata in forma numerica, oppure se le condizioni al contorno sono complicate? Non rimane altro che rivolgerci ad un metodo numerico. Uno di questi metodi numerici, certamente il metodo più usato, è il metodo degli elementi finiti.



Capitolo 2

Elementi finiti nell'unidimensionale

Consideriamo un problema unidimensionale descritto da una variabile di configurazione $u(x)$ e da una variabile di sorgente $s(x)$. Sia $[a, b]$ l'intervallo entro il quale le due funzioni sono definite ed esse siano legate da una relazione del tipo

$$-k \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = s(x) \quad v|_a = c \quad -k \frac{dv}{dx} \Big|_b = d \quad (2.1) \quad \{\text{F36}\}$$

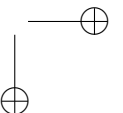
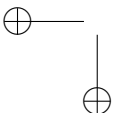
con k costante assegnata. Le condizioni al contorno non sono omogenee. Questa equazione, lineare e non omogenea, ammette una soluzione *in forma chiusa* solo se la funzione sorgente si può integrare due volte in forma analitica.

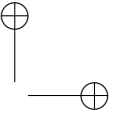
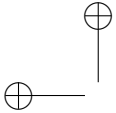
Ad esempio se $s(x) = \sin(x)$ e l'intervallo è $[0, \pi]$ la soluzione è

$$v(x) = \frac{1}{k} \sin(x) + \left(d + \frac{1}{k}\right) x + c \quad (2.2) \quad \{\text{Y087}\}$$

Noi ci proponiamo di eseguire una integrazione approssimata ovvero di trovare una funzione che soddisfi in modo esatto le condizioni al contorno ma che soddisfi in modo approssimato l'equazione differenziale.

OSSERVAZIONE. Si faccia attenzione che abbiamo messo il segno - e la costante k , anche se inizialmente danno fastidio, in quanto le leggi fisiche portano





30 CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE

a questo tipo di equazione. Il fatto di omettere il segno meno e la costante può far piacere allo studente e al matematico ma fa perdere informazioni dal punto di vista fisico. Anche la condizione al contorno che segue porta il segno meno e la costante k perché questo rispetta il fatto fisico.

Condizioni al contorno omogenee La prima cosa da fare è di trasformare l'equazione in modo da avere condizioni al contorno omogenee. A questo scopo possiamo considerare una generica funzione $\phi(x)$ che soddisfi le condizioni non omogenee al contorno assegnate, ovvero

$$\{\text{RU71}\} \quad \phi(a) = c \quad -k\phi'(b) = d \quad (2.3)$$

Possiamo scegliere una funzione lineare del tipo

$$\{\text{RU72}\} \quad \phi(x) = mx + q \quad (2.4)$$

e determinare le costanti m e q in modo che soddisfino le condizioni agli estremi. Le condizioni (2.3) diventano

$$\{\text{RU02}\} \quad ma + q = c \quad -km = d \quad (2.5)$$

donde

$$\{\text{RU73}\} \quad m = -\frac{d}{k} \quad q = c + \frac{d}{k}a \quad (2.6)$$

quindi la funzione è

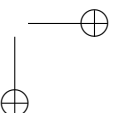
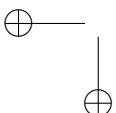
$$\{\text{RU74}\} \quad \phi(x) = c + \frac{d}{k}(a - x) \quad (2.7)$$

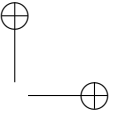
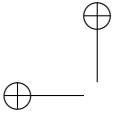
A questo punto facendo il cambiamento di funzione

$$\{\text{RU75}\} \quad u(x) = \phi(x) + v(x) \quad (2.8)$$

si vede che, se la funzione $v(x)$ soddisfa le condizioni al contorno omogenee $v(a) = 0$ e $v'(b) = 0$, allora la funzione $u(x)$ soddisfa quelle non omogenee imposte nel problema (2.1). Infatti

$$\{\text{RU76}\} \quad \begin{cases} u(a) = \phi(a) + v(a) = c + 0 = c \\ -ku'(b) = -k\phi'(b) - kv'(b) = d \end{cases} \quad (2.9)$$





Il problema da risolvere diventa

$$\{FR29\} \quad \boxed{-k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = s(x) \quad u|_a = 0 \quad -k \frac{du}{dx} \Big|_b = 0} \quad (2.10)$$

2.1 La divisione in elementi

Per prima cosa dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in tanti sottointervalli non necessariamente di uguale ampiezza, come mostra la figura (2.1). Chiameremo tali punti di suddivisione i **nodi** e i singoli sottointervalli **elementi**. Se la soluzione (sconosciuta) $u(x)$ è rappresentata da una linea continua, noi cerchiamo una soluzione approssimata $\bar{u}(x)$ descritta da una poligonale che approssimi la funzione sconosciuta. Per fare questo sarà sufficiente determinare i valori approssimati \bar{u}_h della funzione incognita nei nodi in quanto i valori fra i nodi si potranno interpolare linearmente. In questo modo rinunciamo ad ottenere la soluzione esatta e ci proponiamo di ottenere un insieme di discreto e finito di valori \bar{u}_h . Indicando con n il numero di nodi il numero delle incognite è $(n - 1)$.

Si noti che i valori \bar{u}_h non sono necessariamente i valori della funzione esatta in corrispondenza ai nodi: $\bar{u}_h \neq u(x_h)$, come mostra la figura (2.1).

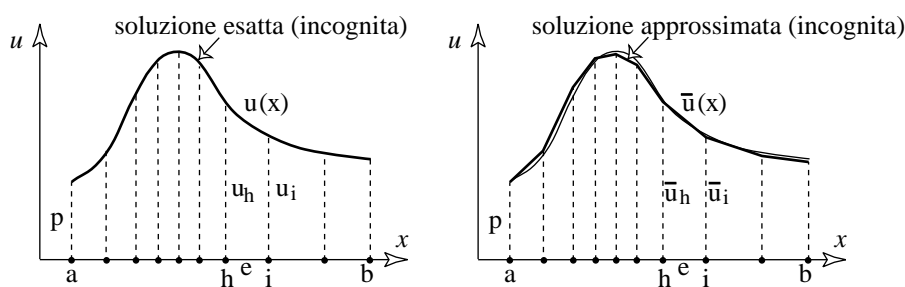
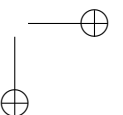
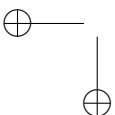


Figura 2.1. La funzione da determinare e la poligonale che la approssima.

{funz-forma7}



2.2 Le funzioni di forma degli elementi

Facendo riferimento alla figura (2.2) consideriamo due nodi consecutivi $h, h + 1$ ed indichiamo con e l'elemento da essi individuato. Definiamo in tale elemento due funzioni, tante sono i nodi dell'elemento, che siano nulle al di fuori dell'elemento, che abbiano un andamento lineare nell'interno dell'elemento e che valgano uno in un nodo e zero nel nodo rimanente.

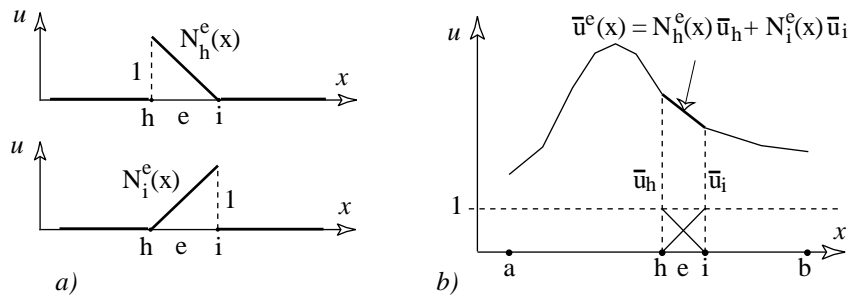


Figura 2.2. a) Le funzioni di forma di un elemento unidimensionale; b) la loro combinazione lineare dà la funzione approssimata nell'interno dell'elemento.

{funz-forma4}

La funzione $u(x)$ può essere approssimata entro l'elemento e da un segmento di retta come indicato in figura (2.2b).

È facile vedere che due funzioni *lineari*, riportate in figura (2.2a), che assumono il valore 1 ad un estremo e zero all'altro estremo sono

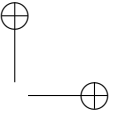
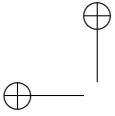
$$\{G10\} \quad N_h^e(x) \triangleq \frac{x_{h+1} - x}{x_{h+1} - x_h} \quad N_{h+1}^e(x) \triangleq \frac{x - x_h}{x_{h+1} - x_h} \quad (2.11)$$

Esse prendono il nome di **funzioni di forma dell'elemento**. Infatti

$$\{DZ56\} \quad \begin{cases} N_h^e(x_h) = 1 & N_h^e(x_{h+1}) = 0 \\ N_{h+1}^e(x_h) = 0 & N_{h+1}^e(x_{h+1}) = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Si constata che il segmento di retta della figura (2.2b) può scriversi nella forma sintetica

$$\{G11\} \quad \bar{u}^e(x) = N_h^e(x) \bar{u}_h + N_{h+1}^e(x) \bar{u}_{h+1} \quad (2.13)$$



2.3 Le funzioni di forma nodali

Con riferimento alla figura (2.4a), consideriamo due elementi contigui e_1 ed e_2 ed indichiamo con h il nodo comune. Indichiamo con x_h la coordinata del nodo h . Mediante le funzioni di forma dei due elementi contigui possiamo costruire le **funzioni di forma nodali** definite dalla relazione

$$\begin{cases} N_h(x) \triangleq N_h^{e_1}(x) + N_h^{e_2}(x) & \text{per } x_{h-1} \leq x \leq x_{h+1} \\ N_h(x) \triangleq 0 & \text{per } x \leq x_{h-1} \text{ e per } x_{h+1} \leq x \end{cases} \quad (2.14) \quad \{\text{G12}\}$$

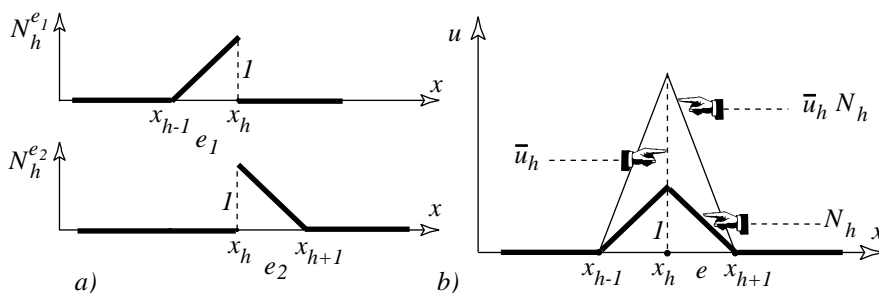
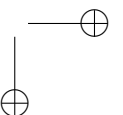
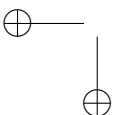


Figura 2.3. a) funzioni di forma dell'elemento; b) funzioni di forma nodali.

{funz-forma8}

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che una funzione è definita entro un dominio quando è assegnato il valore della funzione per ogni punto del dominio. Nel caso particolare, ma oggi frequente, che si consideri una funzione che ha valori non nulli solo in una parte del dominio tale parte prende il nome di **supporto** della funzione. Ne viene che la funzione di forma nodale $N_h(x)$ ha come supporto i due elementi e_1 ed e_2 adiacenti al nodo h .

A causa della loro forma le funzioni di forma nodali sono chiamate **funzioni a tetto** (roof functions). La lettera N è l'iniziale della parole nodale.



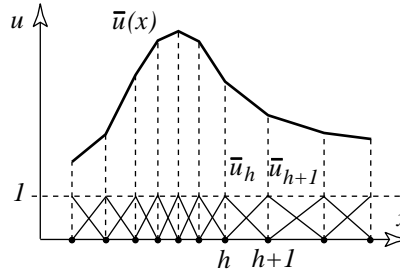


Figura 2.4. La poligonale che approssima la funzione si può esprimere come combinazione lineare delle funzioni di forma nodali. {funz-forma6}

Introdotte le funzioni di forma nodali possiamo scrivere la funzione approssimante come combinazione lineare delle funzioni di forma nodali ovvero

$$\{B09\} \quad \bar{u}(x) = \sum_{h=1}^n \bar{u}_h N_h(x) \quad (2.15)$$

come mostra la figura (2.4b). Il numero n dei valori nodali prende il nome di numero di **gradi di libertà**. Questo perché, in analogia alla meccanica ove le coordinate libere individuano la configurazione del sistema, le \bar{u}_h possono essere considerate come delle coordinate libere che individuano la soluzione approssimata $\bar{u}(x)$.

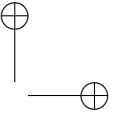
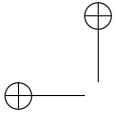
OSSERVAZIONE. L'analogia tra le \bar{u}_h e le coordinate libere q_h della meccanica è ancora più forte se osserviamo che nel caso di funzioni dipendenti dal tempo si potrà scrivere

$$\{G14\} \quad \bar{u}(t, x) = \sum_{h=1}^n \bar{u}_h(t) N_h(x) \quad (2.16)$$

ovvero la dipendenza dal tempo viene assorbita nelle funzioni $\bar{u}_h(t)$ che diventano così analoghe alle coordinate libere (o lagrangiane) $q_h(t)$ della dinamica.

OSSERVAZIONE Ricordiamo che una funzione di una o più variabili può essere espressa in modo approssimato come combinazione di lineare di certe funzioni $\varphi_k(x)$ nella forma

$$\{G15\} \quad u(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x). \quad (2.17)$$



2.4. IL METODO DI GALERKIN

35

Le funzioni φ_k prendono il nome di **funzioni di base**. Il nome è in armonia con il fatto che un vettore in \mathbb{R}^3 può scriversi nella forma

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \quad (2.18) \quad \{\text{G16}\}$$

ed i vettori \vec{e}_k si chiamano *vettori base*. Se $n = \infty$ si parla di *sviluppo in serie di funzioni*. Un esempio classico di sviluppo in serie di funzioni è lo sviluppo di Fourier in cui le funzioni base sono i seni e i coseni. Si possono utilizzare anche particolari famiglie di polinomi, ad esempio i polinomi di Hermite, di Legendre, di Laguerre, ecc. Alla luce di questa interpretazione la scomposizione (2.15) mostra che *negli elementi finiti le funzioni di base sono le funzioni di forma nodali*.

2.4 Il metodo di Galerkin

Se al posto della funzione $u(x)$ incognita noi mettiamo una funzione approssimata del tipo (2.15) l'equazione (2.10) non sarà soddisfatta. Facendo la differenza fra il primo e il secondo membro otteniamo un **residuo** dipendente dalle n costanti \bar{u}_k . Otterremo quindi

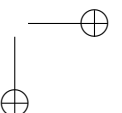
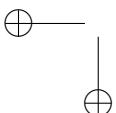
$$r(x; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) = -k \sum_{h=1}^n \frac{d^2 N_h(x)}{dx^2} \bar{u}_h - s(x) \quad (2.19) \quad \{\text{G18}\}$$

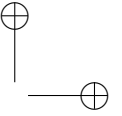
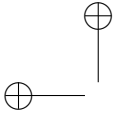
È evidente che la soluzione $u(x)$ del problema renderebbe nullo tale residuo. Dobbiamo ora trovare un criterio che ci consenta di determinare i “migliori” coefficienti \bar{u}_h della combinazione lineare.

OSSERVAZIONE. Il criterio che useremo nasce dall'osservazione che in uno spazio tridimensionale se un vettore è nullo sono nulle le sue tre componenti. Se si scelgono tre vettori linearmente indipendenti $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, cui si dà il nome di *vettori base*, e si considerano i tre prodotti scalari del vettore per i tre vettori base

$$\vec{r} = 0 \quad \text{implica} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{r} = 0 \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{r} = 0 \quad \vec{e}_3 \cdot \vec{r} = 0. \quad (2.20) \quad \{\text{G19}\}$$

Detto a parole: *se un vettore è nullo, i prodotti scalari del vettore per i versori degli assi sono nulli e viceversa*. Questo criterio si può prendere come spunto





36 CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE

ed estenderlo alle funzioni. Osservando l'analogia tra due vettori \vec{w} , \vec{r} e due funzioni $w(x)$, $r(x)$ espressa dalle relazioni

$$\vec{w} \cdot \vec{r} = \sum_{h=1}^n w_h r_h \quad \longrightarrow \quad (w, r) = \int_a^b w(x) r(x) dx \quad (2.21) \quad \{\text{G20}\}$$

si può considerare l'integrale come l'estensione della nozione di prodotto scalare dai vettori alle funzioni. Ne viene che, indicando con

$$\{\text{G21}\} \quad w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x) \quad (2.22)$$

una n -pla di funzioni scelte con qualche criterio di opportunità, e concepite queste come funzioni *peso* o *funzioni di prova*, il requisito di ortogonalità di un vettore ai vettori base dello spazio vettoriale tridimensionale si può estendere nella forma

$$\{\text{G22}\} \quad \int_a^b w_h(x) r(x) dx = 0 \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

Applicando queste n condizioni al residuo di una equazione si ottiene il sistema

$$\{\text{G23}\} \quad \int_a^b w_h(x) r(x; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) dx = 0 \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

che, una volta risolto, fornisce una n -pla di valori \bar{u}_k . Il meccanico teorico russo Galerkin nel 1915 ha scelto come funzioni peso le stesse funzioni di forma per cui le relazioni (2.24) diventano

$$\{\text{GT23}\} \quad \int_a^b N_i(x) r(x; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) dx = 0 \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

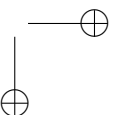
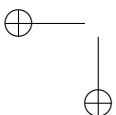
Il metodo di Galerkin consiste di due atti:

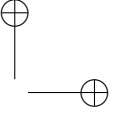
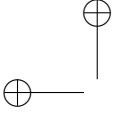
Primo atto: si richiede che il residuo sia ortogonale alle n funzioni nodali

$$\{\text{G24}\} \quad N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad \dots \quad N_n(x) \quad (2.26)$$

vale a dire si impongono le n condizioni

$$\{\text{G25}\} \quad \int_a^b N_i(x) r(x; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) dx = 0 \quad (2.27)$$





2.5. LA FORMAZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO

37

ovvero

$$\{G26\} \quad \int_a^b N_i(x) \left[-k \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - s(x) \right] dx = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.28)$$

Secondo atto: si effettua una integrazione per parti sulla derivata seconda al fine di abbassare l'ordine delle derivate:

$$-k \left[N_i(x) \frac{d \bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b + \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{d \bar{u}(x)}{dx} dx - \int_a^b N_i(x) s(x) dx = 0. \quad (2.29) \quad \{G27\}$$

In questo modo non è più necessario imporre alle funzioni di forma nodali di essere derivabili due volte. Questo fatto costituisce un passaggio essenziale in quanto le funzioni di forma nodali, che sono funzioni del tipo a tetto, non ammettono la derivata seconda nel nodo h a causa della discontinuità della derivata prima in quel punto.

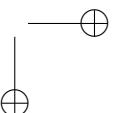
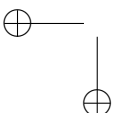
Otteniamo in tal modo tante equazioni del tipo (2.29) quante sono le incognite. E' questo il metodo di Galerkin.

2.5 La formazione del sistema algebrico

A questo punto si tratta di valutare gli integrali per ottenere esplicitamente il sistema algebrico lineare che risolto fornirà le \bar{u}_h desiderate.

Possiamo scrivere l'ultima equazione nella forma più espressiva

$$\int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{d \bar{u}(x)}{dx} dx = \int_a^b N_i(x) s(x) dx + k \left[N_i(x) \frac{d \bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b \quad (2.30) \quad \{G30\}$$



Il termine al primo membro può essere scritto nella forma

$$\left\{ \begin{aligned} \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} dx &= \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \left[\sum_{h=1}^n \frac{dN_h(x)}{dx} \bar{u}_h \right] dx \\ &= \sum_{h=1}^n \left[\int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx \right] \bar{u}_h \\ &= \sum_{h=1}^n f_{ih} \bar{u}_h \end{aligned} \right. \quad (2.31) \quad \{G31\}$$

avendo posto

$$\{G32\} \quad f_{ih} \triangleq \int_a^b k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx. \quad (2.32)$$

Si osservi che $f_{ih} = f_{hi}$ ovvero la matrice formata da questi elementi è *simmetrica*. Questa è la **matrice fondamentale**.

OSSERVAZIONE. In ogni campo esiste un *problema fondamentale*: date le sorgenti determinare la configurazione. L'equazione che risolve il problema fondamentale si chiamerà *equazione fondamentale*. Se questa equazione è discreta anziché differenziale la matrice che la caratterizza sarà bene chiamarla *matrice fondamentale*. Negli elementi finiti questa è chiamata *matrice del sistema* e anche *matrice di rigidezza* a causa del ruolo storico che tale matrice ha nella meccanica dei solidi elastici ove è stata introdotta per la prima volta.

Indichiamo con s_h e con c_h i due termini a secondo membro dell'equazione (2.29). Abbiamo scelto la lettera s in quanto è l'iniziale di *sorgente*, la lettera c in quanto è l'iniziale di *contorno* e la lettera f in quanto iniziale di *fondamentale*. Avremo:

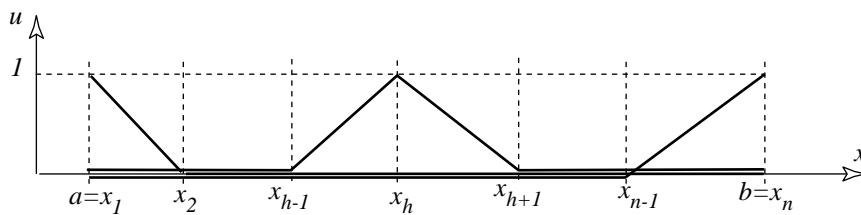
$$\{G33\} \quad s_i \triangleq \int_a^b N_i(x) s(x) dx \quad c_i \triangleq k \left[N_i(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b \quad (2.33)$$

Fatte queste posizioni il sistema algebrico acquista la forma

$$\{G34\} \quad \boxed{\sum_{h=1}^n f_{ih} \bar{u}_h = s_i + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)} \quad (2.34)$$

2.6 Il calcolo esplicito dei coefficienti

Secondo l'equazione (2.32) il calcolo dei coefficienti comporta il calcolo dell'integrale del prodotto delle derivate delle funzioni nodali sull'intero dominio. Poiché per i due nodi di bordo le funzioni nodali sono formate solo da un tratto in salita e da un tratto in discesa, come mostra la figura (2.5) dobbiamo distinguere tre casi:



{tanteforme}

Figura 2.5. Funzioni di forma nodali.

Dal momento che \bar{u}_1 è assegnato l'equazione corrispondente ad $i = 1$ deve essere sostituita con l'equazione $\bar{u}_1 = 0$.

Caso $i = h$ essendo h un nodo interno.

$$\begin{aligned}
 f_{h,h} &= \int_a^b k \left[\frac{dN_h}{dx} \right]^2 dx \\
 &= k \int_{x_{h-1}}^{x_h} \left[\frac{1}{x_h - x_{h-1}} \right]^2 dx + k \int_{x_h}^{x_{h+1}} \left[-\frac{1}{x_{h+1} - x_h} \right]^2 dx \quad (2.35) \quad \{G36\} \\
 &= k \left(\frac{1}{x_h - x_{h-1}} + \frac{1}{x_{h+1} - x_h} \right)
 \end{aligned}$$

Caso $i = h = 1$.

$$f_{1,1} = \int_a^b k \left[\frac{dN_1}{dx} \right]^2 dx = k \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \right]^2 dx = k \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right) \quad (2.36) \quad \{GY36\}$$

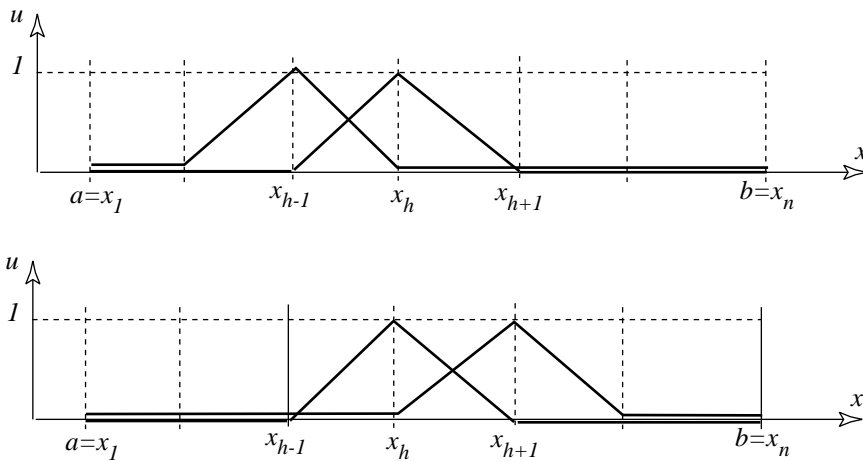
40 CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE

Caso $i = h = n$.

$$f_{n,n} = \int_a^b k \left[\frac{dN_n}{dx} \right]^2 dx = k \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right]^2 dx = k \left(\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right) \quad (2.37) \quad \{\text{GR36}\}$$

Caso $i \neq h$. Se i nodi i e h sono contigui l'intervallo di integrazione si riduce all'elemento compreso tra i nodi adiacenti, come mostra la figura (2.6). In questo caso la derivate sono l'una positiva e l'altra negativa.

Se $i = h - 1$ e quindi l'equazione (2.32) diviene

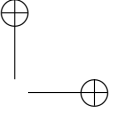
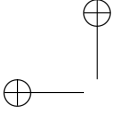


{tanteforme1}

Figura 2.6. Funzioni di forma nodali.

$$\begin{aligned} f_{h-1,h} &= \int_a^b k \frac{dN_{h-1}(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx = \int_{x_{h-1}}^{x_h} k \frac{-1}{x_h - x_{h-1}} \frac{1}{x_h - x_{h-1}} dx \\ &= -k \left(\frac{1}{x_h - x_{h-1}} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

{GT38}



Se $i = h + 1$ e quindi l'equazione (2.32) diviene

$$\begin{aligned} f_{h+1,h} &= \int_a^b k \frac{dN_{h+1}(x)}{dx} \frac{dN_h(x)}{dx} dx = \int_{x_h}^{x_{h+1}} k \frac{1}{x_{h+1} - x_h} \frac{-1}{x_{h+1} - x_h} dx \\ &= -k \left(\frac{1}{x_{h+1} - x_h} \right) \end{aligned} \quad \text{(G38)} \quad (2.39)$$

Si noti che la matrice fondamentale, oltre ad essere simmetrica, ha gli elementi non nulli sulla diagonale principale e sulle due diagonali adiacenti ovvero è **tri-diagonale**.

Se i nodi non sono contigui non esiste un elemento comune, ovvero l'intersezione tra i due insiemi di elementi è vuota, e perciò $f_{hk} = 0$.

Calcolo degli s_i . Con riferimento alla formula (2.33) indicato con e_1 l'elemento a sinistra di h e con e_2 quello a destra si avrà

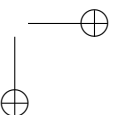
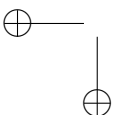
$$s_i \triangleq \int_a^b N_i(x) s(x) dx = \int_{e_1} N_i(x) s(x) dx + \int_{e_2} N_i(x) s(x) dx \quad (2.40) \quad \text{\{G40\}}$$

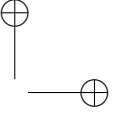
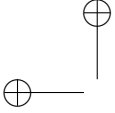
Questo integrale deve essere calcolato separatamente per i nodi interni e per quelli di bordo:

$$\left\{ \begin{aligned} s_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} s(x) dx \\ s_h &= \int_{x_{h-1}}^{x_h} \frac{x - x_{h-1}}{x_h - x_{h-1}} s(x) dx + \int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{x_{h+1} - x}{x_{h+1} - x_h} s(x) dx \\ s_n &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} s(x) dx \end{aligned} \right. \quad (2.41) \quad \text{\{H10\}}$$

Questi integrali possono essere effettuati analiticamente, quando è possibile, o numericamente: in quest'ultimo caso il metodo più usato è quello dei punti di Gauss che presentiamo in Appendice (A).

Nel caso in cui la sorgente sia uniforme, indicato con s_0 il suo valore





42 CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE

potremo calcolare subito l'integrale:

$$\begin{cases} s_1 = s_0 \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) dx = \frac{1}{2} s_0 (x_2 - x_1) \\ s_h = s_0 \int_{x_{h-1}}^{x_{h+1}} N_h(x) dx = \frac{1}{2} s_0 (x_{h+1} - x_{h-1}) \\ s_n = s_0 \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_n(x) dx = \frac{1}{2} s_0 (x_n - x_{n-1}). \end{cases} \quad (2.42) \quad \{H11\}$$

Calcolo dei c_i . Esaminiamo il termine al bordo della formula (2.30) che indicheremo con c_i . Dal momento che il primo nodo da considerare è quello che porta il numero due e dal momento che tutte le funzioni di forma nodali sono nulle al di fuori dei due elementi adiacenti al relativo nodo ne viene che $N_i(a) = 0$ per $i = 2, 3, \dots, n$. Quindi il termine di bordo si riduce a

$$\{H12\} \quad c_i \triangleq k \left[N_i(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_a^b = k N_i(b) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \Big|_b \quad (2.43)$$

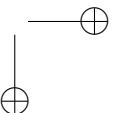
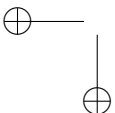
Questi termini sono nulli essendo $N_i(b) = 0$, salvo il termine c_n in quanto $N_n(b) = 1$. Per esso si ha

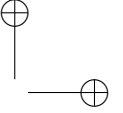
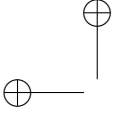
$$\{H13\} \quad c_n = \left[k \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right]_b = 0 \quad (2.44)$$

Si osservi che non conoscendo la derivata in a non possiamo calcolare il termine c_1 e quindi siamo costretti ad eliminare la prima equazione. Riassumendo

$$\{H14\} \quad \begin{cases} \text{per } i = 1 & c_1 \text{ non si può calcolare} \\ \text{per } i = 2, 3, \dots, (n-1) & c_i = 0 \\ \text{per } i = n & c_n = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Quindi il termine al bordo non si può calcolare nei nodi in cui è assegnata la funzione; è nullo per tutti i nodi interni; è nullo negli estremi in cui la derivata è nulla (quando $d = 0$) mentre uguaglia il valore assegnato





del termine al bordo negli estremi in cui la derivata non è nulla.

$$\text{(DR42)} \quad \begin{cases} f_{1,1} \bar{u}_1 + f_{1,2} \bar{u}_2 + \dots + f_{1,n} \bar{u}_n = s(1) + c(1) \\ f_{2,1} \bar{u}_1 + f_{2,2} \bar{u}_2 + \dots + f_{2,n} \bar{u}_n = s(2) + c(2) \\ \dots \\ f_{n,1} \bar{u}_1 + f_{n,2} \bar{u}_2 + \dots + f_{n,n} \bar{u}_n = s(n) + c(n) \end{cases} \quad (2.46)$$

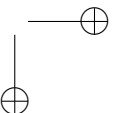
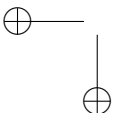
Poiché \bar{u}_1 è assegnato (e uguale a 0), la prima equazione deve essere sostituita con la seguente:

$$1 \bar{u}_1 + 0 \bar{u}_2 + \dots + 0 \bar{u}_n = 0 \quad (2.47) \quad \text{(DR72)}$$

Questo implica che si deve porre $f_{1,1} = 1$ e $f_{1,h} = 0$ per $h \neq 1$.

2.7 Un esempio semplicissimo

```
% =====
%      esempio del metodo degli elementi finiti
% =====
% Risolviamo una equazione del II ordine
% nell'intervallo: [0,1];
%   - k*u''(x) = s(x)
% ponendo per k il valore 3 e usando
% il metodo degli elementi finiti.
% Esaminiamo un caso a soluzione nota e confrontiamo
% i risultati ottenuti con il FEM con quelli teorici.
% Consideriamo la funzione
%   u(x) = x*x*x;   u'(x) = 3*x*x   u''(x) = 6*x;
% la funzione s(x) risulta s(x) = -18*x;
% Come condizioni al contorno del problema imponiamo
% il valore della funzione ad una estremità
% con u(0)=0 e il valore del flusso all'estremità
% opposta (valore del flusso per x=1) u'(1)=3.
%
clear % azzera le variabili in memoria
clc % pulisci finestra di testo
```



44 CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE

```
% =====  
%      seleziona modalita' grafica  
% =====  
close % chiudi finestra grafica precedente  
h1 = figure(1); % apre una finestra grafica  
set(h1, 'Units', 'normalized',...  
      'Position', [0.5 0.5 0.45 0.5]);  
whitebg(h1, 'black') % colore di fondo  
hold on % piu' tracciamenti sulla stessa finestra  
zoom on % ingrandire l'immagine  
% =====  
%      grafico funzione esatta  
% =====  
XX = 0:0.01:1; % crea il vettore delle ascisse  
N = size(X,2); % numero colonne del vettore  
for i = 1:N;  
%      valori della funzione u  
    UU(i) = XX(i)*XX(i)*XX(i);  
end  
plot(XX,UU); % grafica la funzione  
% =====  
%      divido in intervalli (anche diseguali)  
% =====  
X = [0 0.2 0.4 0.5 0.6 0.8 1]; % assegna nodi  
n = size(X,2); % numero elementi del vettore X  
k = 3; % costante materiale  
% imposizione delle condizioni al contorno:  
% valutiamo u(0) e la assegniamo ad U(1);  
U(1) = 0 % valore iniziale [U= 0]  
% valutiamo u'(1)  
Duf = 3; % valore finale della derivata [Duf= 3*1*1]  
d = k*Duf;  
% =====  
%      calcolo dei coefficienti  
% =====
```

```

% Devo formare il sistema:
%   Somma su h   f(i,h) U(h) = s(i)+c(i)
% -----
% f(1,1)*U(1)+f(1,1)*U(2)+...   = s(1)+c(1)
%   .....
% ...+f(h,h-1)*U(h-1)+f(h,h)*U(h)+f(h,h+1)*U(h+1)
%                               +...= s(h)+c(h)
%   .....
% ...+f(n,n-1)*U(n-1)+f(n,n)*U(n)= s(n)+c(n)
% -----
% Inizialmente si assegna zero a tutti gli elementi matrice
% f=zeros(n,n);
% la prima equazione viene sostituita con U(1)=0 quindi
% f(1,1)=1;
% pertanto l'indice h parte da 2
% for h = 2:(n-1)
%     f(h,h-1) = -k/(X(h)-X(h-1));
%     f(h,h)   = +k/(X(h)-X(h-1)) + k/(X(h+1)-X(h));
%     f(h,h+1) = -k/(X(h+1)-X(h));
% end
% f(n,n-1) = - k/(X(n)-X(n-1));
% f(n,n)   = + k/(X(n)-X(n-1));
% =====
%   termini di sorgente s(i) nei singoli elementi
%   calcolati con due punti di Gauss
% =====
% S(1) è inutile: la prima equazione va sostituita.
% Punti di Gauss per un polinomio di secondo e terzo grado
% g1=-1/sqrt(3); g2=+1/sqrt(3);
% -----
%   for h=2:(n-1)
%       coordinate estremi degli intervalli adiacenti:
%       A=X(h-1); B=X(h);   C=X(h+1);
%       coordinate dei punti di Gauss dei due segmenti:
%       x1=(A+B)/2+(B-A)/2*g1; x2=(A+B)/2+(B-A)/2*g2;

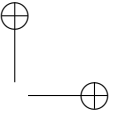
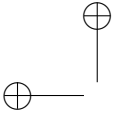
```

46 CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE

```

        x3=(B+C)/2+(C-B)/2*g1; x4=(B+C)/2+(C-B)/2*g2;
%     le funzioni da integrare sono:
%     da integrare su [A, B]:  F= (x-A)*(-18*x)/(B-A);
%     da integrare su [B, C]:  G=(C-x)*(-18*x)/(C-B);
%     Pertanto i valori degli integrali nei
%     rispettivi intervalli sono:
        S1=((x1-A)*(-18*x1)+(x2-A)*(-18*x2))/2;
        S2=((C-x3)*(-18*x3)+(C-x4)*(-18*x4))/2;
%     da cui il valore del coefficiente S(h) risulta:
        S(h)=S1+S2;
    end
% -----
%     coordinate estremi dell'ultimo intervallo
    A=X(n-1); B=X(n);
%     coordinate dei punti di Gauss dell'ultimo intervallo:
    x1=(A+B)/2+(A-B)/2*g1;  x2=(A+B)/2+(A-B)/2*g2;
    S(n)=$((x1-A)*(-18*x1)+( x2-A)*(-18*x2))/2;
% =====
%           termini di contorno C(i)
% =====
%     C(1) non si può calcolare: e del resto non serve.
    for h = 2:(n-1)
        C(h) = 0;
    end
    C(n) = d;
%     Sommo i termini di sorgente con quelli di bordo
    SC(1)=0; % valore iniziale della U
    for h = 2:n
        SC(h) = S(h) + C(h) ;
    end
% =====
%           Risoluzione del sistema fondamentale
% =====
%     Risolviamo il sistema:
    U = f \ SC';

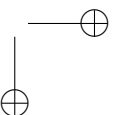
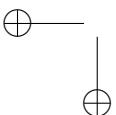
```

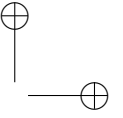
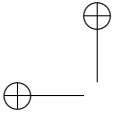


2.7. UN ESEMPIO SEMPLICISSIMO

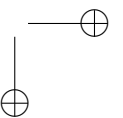
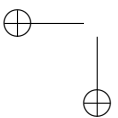
47

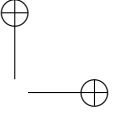
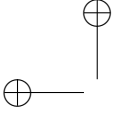
```
plot(X,U,'r','era','back') % soluzione approssimata  
% =====
```





48 *CAPITOLO 2. ELEMENTI FINITI NELL'UNIDIMENSIONALE*





Capitolo 3

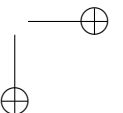
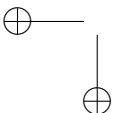
Elementi finiti nel bidimensionale

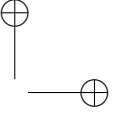
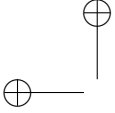
3.1 La divisione in elementi

Per semplicità ci limiteremo ad esporlo per una maglia composta solamente di triangoli. Faremo riferimento alla risoluzione dell'equazione di Poisson (1.48) che ha condizioni al bordo miste.

Innanzitutto approssimiamo il bordo con una poligonale. Indichiamo con $\bar{\Omega}$ la regione contenuta nella poligonale. Quindi dividiamo la regione $\bar{\Omega}$ in tanti triangoli. L'insieme dei triangoli prende il nome di *rete* o di *maglia* (inglese: *mesh*). Sarà bene fare in modo che i triangoli siano abbastanza regolari ovvero prossimi all'equilatero: triangoli con un angolo ottuso o triangoli stretti e lunghi saranno da evitare, se non altro per ragioni... estetiche! Questo requisito di regolarità migliora anche la bontà della soluzione approssimata. I triangoli che si trovano sul bordo devono avere i loro lati appoggiati ai lati della poligonale. I vertici dei triangoli saranno chiamati **nodi** e i triangoli stessi saranno chiamati **elementi**. Indicheremo un nodo tipo con la lettera h ed un elemento tipo con la lettera e . Indicando con M il numero di nodi avremo

$$h = 1, 2, \dots, M. \quad (3.1) \quad \{H15\}$$





3.2 Funzioni di forma degli elementi

Ci proponiamo di determinare valori approssimati della funzione $u(P)$ nei nodi. Partendo da tali valori nodali approssimati potremo ottenere una espressione approssimata $\bar{u}(P)$ della funzione all'interno dell'elemento supponendo che la funzione sia di tipo **affine**

$$\{\text{H16}\} \quad \bar{u}^e(P) = m^e + p^e x + q^e y \quad (3.2)$$

entro ciascun elemento e . I coefficienti m^e, p^e, q^e saranno diversi per ciascun elemento, potranno determinarsi in funzione dei valori approssimati della funzione u nei vertici del triangolo.

OSSERVAZIONE. Comunemente una funzione del tipo indicato nell'equazione (3.2) si dice *lineare* ma il termine corretto è funzione *affine*. Una funzione affine si riduce ad una lineare quando manca il termine costante. Infatti la linearità comporta che raddoppiando il valore di una variabile, ad esempio la x , raddoppi il valore della funzione u : questo non capita se la costante additiva è diversa da zero.

Si noti che quando si sviluppa una funzione in serie di Taylor, l'approssimazione del primo ordine costituisce una funzione affine. Infatti

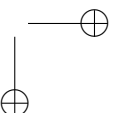
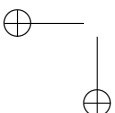
$$\{\text{H17}\} \quad u(P) = u(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots \quad (3.3)$$

avendo indicato con tre puntini i termini di ordine superiore. Raccogliendo le costanti si ha

$$\{\text{H18}\} \quad u(P) \approx m + p x + q y \quad (3.4)$$

che è la forma tipica di una funzione affine.

La figura (3.1b) mostra il tipo di approssimazione che si intende fare. Il procedimento si sviluppa in più fasi.



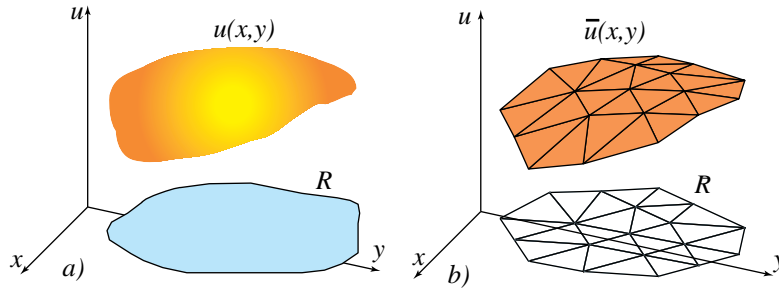


Figura 3.1. a) La superficie che descrive la soluzione; b) la superficie poliedrica che approssima la soluzione.

Considerato un elemento generico indicato con l'etichetta e , siano 1, 2, 3 le etichette dei suoi tre vertici. Indichiamo con $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ i valori del potenziale in questi vertici: questi si chiamano **valori nodali**. Avendo fatto l'ipotesi che entro ciascun elemento la funzione abbia l'andamento (3.2), illustrato dalla figura (3.2), si tratterà di determinare i tre coefficienti relativi al triangolo tipo in funzione dei valori nodali.

Per farlo si può scrivere tre volte l'equazione (3.2) imponendo ciascuna volta alla funzione di assumere il corrispondente valore nodale:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = m^e + p^e x_1 + q^e y_1 \\ \bar{u}_2 = m^e + p^e x_2 + q^e y_2 \\ \bar{u}_3 = m^e + p^e x_3 + q^e y_3 \end{cases} \quad (3.5) \quad \{H19\}$$

Per risolvere il sistema determinando le tre costanti m^e, p^e, q^e useremo il metodo di Cramer¹. Si constata che il determinante del sistema è uguale al doppio dell'area del triangolo.

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.6) \quad \{20\}$$

Si ottiene

$$m^e = \frac{1}{2A^e} \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & x_1 & y_1 \\ \bar{u}_2 & x_2 & y_2 \\ \bar{u}_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \quad p^e = \frac{1}{2A^e} \begin{vmatrix} 1 & \bar{u}_1 & y_1 \\ 1 & \bar{u}_2 & y_2 \\ 1 & \bar{u}_3 & y_3 \end{vmatrix}; \quad q^e = \frac{1}{2A^e} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \bar{u}_1 \\ 1 & x_2 & \bar{u}_2 \\ 1 & x_3 & \bar{u}_3 \end{vmatrix} \quad (3.7) \quad \{H21\}$$

¹Tale regola è spiegata nella appendice B.

Si sviluppano ora i tre determinanti rispetto alla colonna delle u ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} m^e = \frac{1}{2A^e} [(x_2y_3 - x_3y_2)\bar{u}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\bar{u}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{u}_3] \\ p^e = \frac{1}{2A^e} [(y_2 - y_3)\bar{u}_1 + (y_3 - y_1)\bar{u}_2 + (y_1 - y_2)\bar{u}_3] \\ q^e = \frac{1}{2A^e} [(x_3 - x_2)\bar{u}_1 + (x_1 - x_3)\bar{u}_2 + (x_2 - x_1)\bar{u}_3] \end{array} \right. \quad (3.8)$$

{H22}

Se si inseriscono queste espressioni nella funzione (3.2) e si raccolgono i coefficienti $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ a fattor comune si trova la funzione approssimante

$$\bar{u}^e(P) = \bar{u}_1 N_1^e(P) + \bar{u}_2 N_2^e(P) + \bar{u}_3 N_3^e(P) \quad (3.9)$$

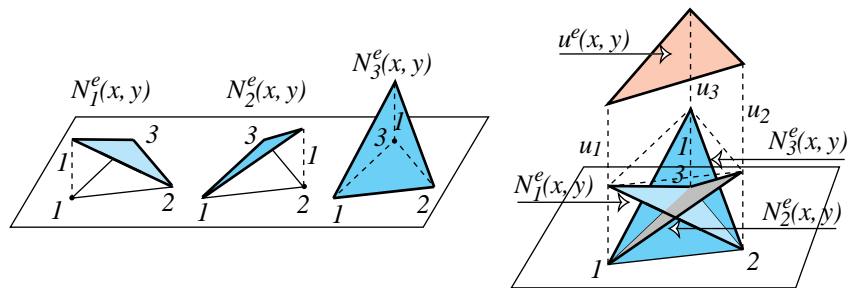
{H23}

avendo posto

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1^e(P) = \frac{1}{2A^e} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ N_2^e(P) = \frac{1}{2A^e} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ N_3^e(P) = \frac{1}{2A^e} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{array} \right. \quad (3.10)$$

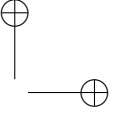
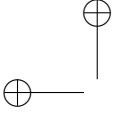
{H24}

che sono tre funzioni affini. Queste funzioni, che prendono il nome di **funzioni di forma dell'elemento**, sono rappresentate in figura (3.2).



{funz-forma5}

Figura 3.2. Le tre funzioni di forma di un elemento.



3.3. FUNZIONI DI FORMA NODALI.

53

Dalle equazioni (3.9) ponendo a turno $x = x_1$ e $y = y_1$, ecc. si ottiene

$$\{H25\} \quad \begin{cases} \bar{u}^e(x_1, y_1) = \bar{u}_1 = \bar{u}_1 N_1^e(x_1, y_1) + \bar{u}_2 N_2^e(x_1, y_1) + \bar{u}_3 N_3^e(x_1, y_1) \\ \bar{u}^e(x_2, y_2) = \bar{u}_2 = \bar{u}_1 N_1^e(x_2, y_2) + \bar{u}_2 N_2^e(x_2, y_2) + \bar{u}_3 N_3^e(x_2, y_2) \\ \bar{u}^e(x_3, y_3) = \bar{u}_3 = \bar{u}_1 N_1^e(x_3, y_3) + \bar{u}_2 N_2^e(x_3, y_3) + \bar{u}_3 N_3^e(x_3, y_3) \end{cases} \quad (3.11)$$

e questo comporta che sia

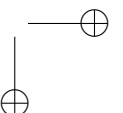
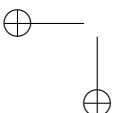
$$N_1^e(x_1, y_1) = 1 \quad N_2^e(x_1, y_1) = 0 \quad N_3^e(x_1, y_1) = 0 \quad (3.12) \quad \{H26\}$$

e analogamente per le altre. Quindi la funzione di forma $N_1^e(P)$ assume il valore uno nel nodo 1 ed il valore zero negli altri due nodi dell'elemento. Essa è quindi rappresentata nell'interno dell'elemento da una porzione di piano, come indicato in figura (3.4) e nel resto del dominio ha valore nullo.

3.3 Funzioni di forma nodali.

Consideriamo un nodo h del complesso primale: esso è nodo comune a diversi elementi. L'insieme di questi elementi sarà denotato con $\mathcal{E}(h)$. Consideriamo la funzione $N_h(P)$ ottenuta componendo² tutte le funzioni $N_h^e(P)$ relative agli elementi e che hanno il nodo h in comune. La funzione $N_h(P)$ vale uno in h e zero in tutti gli altri nodi del complesso, come indicato in figura (3.2). A causa della loro forma sono chiamate anche funzioni a **piramide** [18, p.77].

²Non si può dire *sommando* in quanto tutte le funzioni di forma nodali $N_h^e(P)$ hanno valore 1 nel nodo h e quindi la loro somma darebbe una funzione che, nel nodo h , varrebbe 5 o 6 o 7 a seconda di quanti elementi hanno il nodo h in comune.



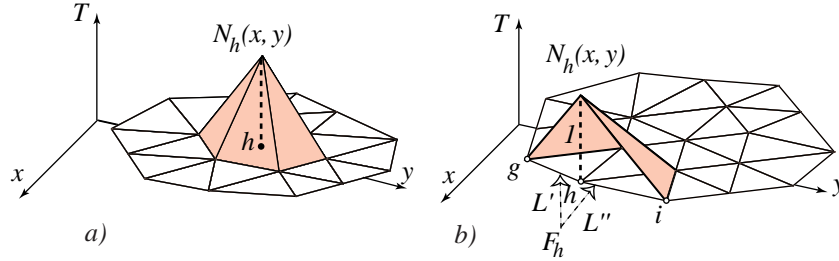


Figura 3.3. Le funzioni di forma nodali.

{funz-forma3}

Si può scrivere

$$\{H27\} \begin{cases} N_h(P) & \triangleq \sum_{e \in \mathcal{E}(h)} N_h^e(x, y) & \text{se } x \neq x_h \text{ e } y \neq y_h \\ N_h(x_h, y_h) & \triangleq 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Noi cerchiamo una soluzione *approssimata* del problema di (1.48) della forma

$$\{H28\} \quad \bar{u}(x, y) = \sum_{h=1}^M \bar{u}_h N_h(x, y) \quad (3.14)$$

3.4 Il metodo di Galerkin

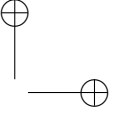
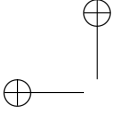
L'obiettivo che si vuole perseguire è quello di determinare con qualche criterio i valori nodali approssimati \bar{u}_h della funzione $u(x, y)$ che forniscano una soluzione approssimata $\bar{u}(x, y)$ del problema iniziale. A questo fine consideriamo la funzione

$$\{H29\} \quad r(x, y; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) \triangleq -k \nabla^2 \bar{u}(x, y) - \rho(x, y). \quad (3.15)$$

Qualora $\bar{u}(x, y)$ fosse la soluzione dell'equazione di Poisson, la funzione $r(x, y)$ sarebbe nulla. Per questa ragione essa si chiama **residuo** dell'equazione.

La funzione $\bar{u}(x, y)$ data dalla equazione (3.14) dipende da M parametri \bar{u}_h . Come determinarli? Consideriamo un *opportuno* insieme di funzioni linearmente indipendenti

$$\{H30\} \quad w_1(x, y), w_2(x, y), \dots, w_M(x, y) \quad (3.16)$$



in numero uguale ai nodi della maglia. A queste funzioni si dà il nome di **funzioni peso**³. Il metodo di Galerkin consiste di due atti:

Primo atto. Il criterio è di imporre che il residuo sia ortogonale a ciascuna funzione peso ovvero che siano soddisfatte le M condizioni

$$\int_{\Omega} w_h(P) r(P; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) dD = 0 \quad \text{per } h = 1, 2, \dots, M. \quad (3.17) \quad \{\text{H31}\}$$

Si ottiene in tal modo un insieme di M equazioni algebriche lineari nelle M incognite \bar{u}_h . La soluzione di questo sistema fornisce gli M valori \bar{u}_h e quindi una soluzione approssimata $\bar{u}(x, y)$ del problema dato.

Il metodo degli elementi finiti sceglie come funzioni peso $w_h(P)$ proprio le funzioni nodali $N_h(P)$ [23]. Si avrà dunque

$$\int_{\Omega} N_h(P) r(P; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) dD = 0 \quad \text{per } h = 1, 2, \dots, M. \quad (3.18) \quad \{\text{H32}\}$$

Sostituendo ad $r(x, y)$ la sua espressione si ottiene

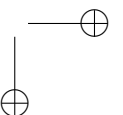
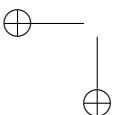
$$\int_{\Omega} N_h(P) [-k \nabla^2 \bar{u}(x, y) - \rho(x, y)] dD = 0 \quad (3.19) \quad \{\text{H33}\}$$

Dal momento che degli M valori nodali ve ne è un certo numero M_0 assegnati⁴ non occorrerà scrivere l'equazione precedente per tutti i nodi ma solo per gli $M' \triangleq M - M_0$ nodi in cui i valori sono incogniti. Siamo così pervenuti ad un sistema formato da M' equazioni algebriche lineari nelle M' incognite $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{M'}$: risolvendolo otteniamo le \bar{u}_h e quindi la soluzione approssimata (3.14).

Nel seguito, per ottenere e semplificare la notazione, in luogo delle coordinate x, y del generico punto P metteremo il punto P stesso.

³ Sono anche chiamate *funzioni di prova* (test functions) [23]. La lettera w è l'iniziale del termine inglese *weight* (peso).

⁴ Questo capita quando si hanno condizioni al bordo di Dirichlet o quelle miste. Ma anche nel caso delle condizioni al bordo di Neumann almeno in un punto del bordo la funzione deve essere assegnata. Ne viene che, nella peggiore delle ipotesi, $M_0 = 1$.



Secondo atto. Dal momento che il primo integrale (3.19) è del tipo

$$\int_D f \nabla^2 g dD \quad (3.20) \quad \text{{H34}}$$

avendo indicato con D un domino piano si può effettuare una integrazione sulla derivata seconda al fine di abbassare l'ordine delle derivate. Avendo a che fare con funzioni di due variabili occorre avere a disposizione una formula che generalizzi la regola di integrazione per parti: questa è la identità di Green

$$\text{{H35}} \quad \int_D f \nabla^2 g dD \equiv \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial n} dL - \int_D \nabla f \cdot \nabla g dD. \quad (3.21)$$

Applicando questa identità all'equazione (3.19) quest'ultima diviene

$$\text{{H36}} \quad -k \int_{\partial \bar{\Omega}} N_h(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial n} dL + k \int_{\bar{\Omega}} \nabla N_h(P) \cdot \nabla \bar{u}(P) dD - \int_{\bar{\Omega}} N_h(P) \rho(P) dD = 0 \quad (3.22)$$

che può scriversi nella forma più espressiva

$$\text{{H37}} \quad k \int_{\bar{\Omega}} \nabla N_h(P) \cdot \nabla \bar{u}(P) dD = \int_{\bar{\Omega}} N_h(P) \rho(P) dD + k \int_{\partial \bar{\Omega}} N_h(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial n} dL. \quad (3.23)$$

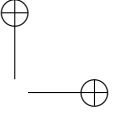
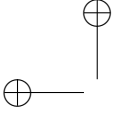
In questo modo non è più necessario imporre alla funzione $\bar{u}(P)$ di essere derivabile due volte. Questo fatto costituisce un passaggio essenziale in quanto le funzioni di forma $N_h(P)$, che sono funzioni del tipo a piramide, non ammettono la derivata prima e seconda nel nodo h .

Otteniamo in tal modo tante equazioni del tipo (2.29) quante sono le incognite. E' questo il metodo di Galerkin.

3.5 La formazione del sistema algebrico

Mediante la formula (3.14) possiamo esprimere la funzione approssimata $\bar{u}(P)$ in termini delle funzioni di forma: si ottiene

$$\text{{H38}} \quad \sum_{k=1}^M k \int_{\bar{\Omega}} \nabla N_h(P) \cdot \nabla N_k(P) \bar{u}_k dD = \int_{\bar{\Omega}} N_h(P) \rho(P) dD + k \int_{\partial \bar{\Omega}} N_h(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial n} dL \quad (3.24)$$



Ponendo

$$\{H39\} \quad \begin{cases} c_{hk} \triangleq k \int_{\bar{\Omega}} \nabla N_h(P) \cdot \nabla N_k(P) dD \\ s_h \triangleq \int_{\bar{\Omega}} N_h(P) \rho(P) dD \\ c_h \triangleq k \int_{\partial \bar{\Omega}} N_h(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial n} dL \end{cases} \quad (3.25)$$

si perviene al sistema algebrico di M' equazioni in M' incognite

$$\boxed{\sum_{k=1}^M c_{hk} \bar{u}_k = s_h + c_h \quad \text{con} \quad h = 1, 2, \dots, M'} \quad (3.26) \quad \{H40\}$$

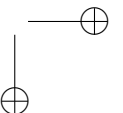
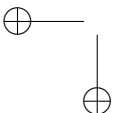
I coefficienti c_{hk} sono gli elementi di una matrice che prende il nome di **matrice fondamentale** o **matrice del sistema** [18, p.142]. Essa è chiamata matrice delle *capacità termiche* nella conduzione termica, delle *capacità elettriche* nella elettrostatica, di *rigidezza* nella meccanica dei solidi, ecc.

3.6 Gradiente delle funzioni di forma.

Ricavo analitico. Partendo dalla forma (3.10) le componenti sono

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} = +\frac{y_2 - y_3}{2A^e} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} = +\frac{y_3 - y_1}{2A^e} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} = +\frac{y_1 - y_2}{2A^e} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} = -\frac{x_2 - x_3}{2A^e} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} = -\frac{x_3 - x_1}{2A^e} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} = -\frac{x_1 - x_2}{2A^e} \end{cases} \quad (3.27) \quad \{I10\}$$

e si tratta di componenti costanti in tutto l'elemento, come è giusto che sia trattandosi di piani che hanno quindi una inclinazione costante sul piano x, y .



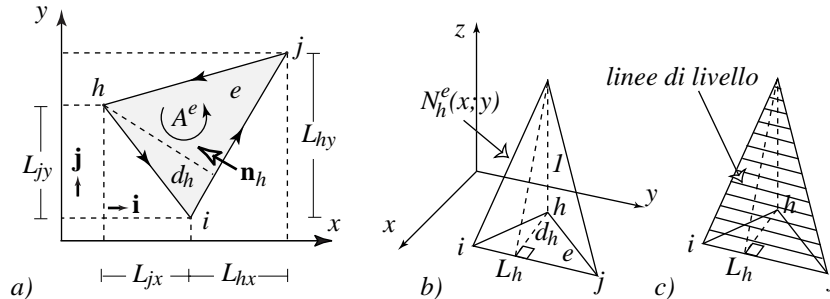


Figura 3.4. a) Il triangolo tipo; b) la funzione di forma $N_h^e(P)$ dell'elemento; c) le linee di livello della funzione precedente. {uscente1}

Ricavo geometrico. Ciascuna funzione di forma ha un gradiente di facile calcolo: trattandosi di funzioni affini che hanno le linee di livello parallele al lato in cui assumono il valore zero, il loro gradiente è un vettore diretto dal lato verso il vertice relativo ortogonalmente al lato stesso. Così il gradiente di $N_h^e(P)$ ha il valore $1/d_h$ essendo d_h l'altezza del triangolo ripetuto al vertice h , come illustrato in figura (3.4). Indicando con \vec{n}_h la normale al lato h entrante nel triangolo e quindi diretta verso il vertice h , potremo scrivere

$$\{I11\} \quad \nabla N_h^e = \frac{1}{d_h} \vec{n}_h. \quad (3.28)$$

Se indichiamo con A^e l'area dell'elemento, con L_h la lunghezza del lato i, j opposto al vertice h potremo scrivere

$$\{I12\} \quad A^e = \frac{1}{2} N_h d_h \quad (3.29)$$

e quindi

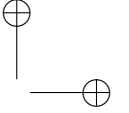
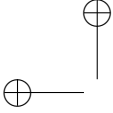
$$\{I13\} \quad \nabla N_h^e = \frac{1}{d_h} \vec{n}_h = \frac{1}{d_h L_h} L_h \vec{n}_h = \frac{1}{2A^e} L_h \vec{n}_h. \quad (3.30)$$

Come si vede dalla figura (3.4) il vettore $L_h \vec{n}_h$ è dato da

$$\{I14\} \quad L_h \vec{n}_h = -(y_j - y_i) \vec{i} + (x_j - x_i) \vec{j} \quad (3.31)$$

per cui

$$\{I15\} \quad \nabla N_h^e = \frac{-(y_j - y_i) \vec{i} + (x_j - x_i) \vec{j}}{2A^e} \quad (3.32)$$



Le componenti così ottenute coincidono con quelle date dalla formula (3.27).

3.7 Il calcolo dei coefficienti

Calcolo dei c_{hk} . A causa del fatto che ogni funzione di forma $N_h(P)$ è nulla al di fuori del supporto Ω_h (la base della piramide) ogni integrale esteso a tutto il dominio $\bar{\Omega}$ può essere ristretto ad Ω_h . Ne viene che l'integrale esteso ad Ω_h può scomporsi nella somma degli integrali estesi ai singoli elementi che lo costituiscono, come mostra la figura (3.5).

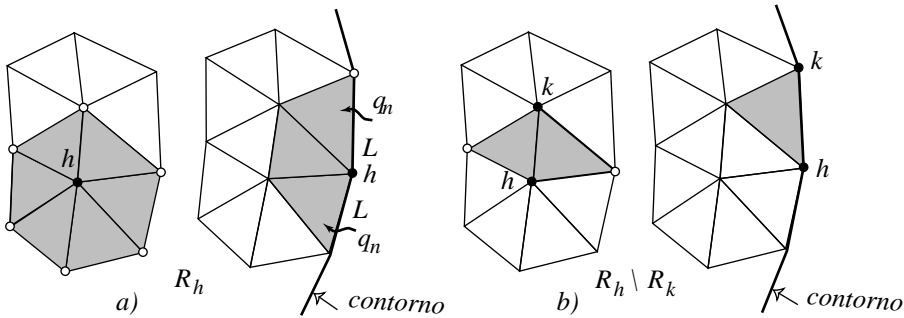
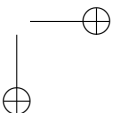
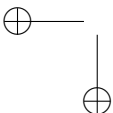


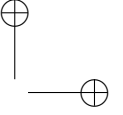
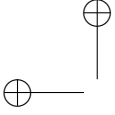
Figura 3.5. a) La regione di integrazione per le c_{hh} e le s_h ; b) idem per le c_{hk} . {intorni}

$$c_{hk} \triangleq k \sum_{e \in \mathcal{F}} \int_e \nabla N_h^e(P) \cdot \nabla N_k^e(P) dD \tag{3.33} \quad \{\text{I16}\}$$

Dal momento che i gradienti sono costanti gli integrali indicati si possono calcolare esplicitamente. Si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} \int_e \nabla N_h^e(P) \cdot \nabla N_k^e(P) dD &= \int_e \left(\frac{y_k - y_h}{2A^e} \frac{y_p - y_k}{2A^e} + \frac{x_k - x_h}{2A^e} \frac{x_p - x_k}{2A^e} \right) dD \\ &= \frac{1}{4A^e} [(y_k - y_h)(y_p - y_k) + (x_k - x_h)(x_p - x_k)] \end{aligned} \right. \tag{3.34} \quad \{\text{I17}\}$$





Calcolo degli s_h Dal momento che le funzioni di forma sono diverse da zero solo nella regione che forma la base della piramide, l'integrale si può restringere a questa regione.

$$\{I18\} \quad s_h \triangleq \int_{\Omega_h} N_h(P) \rho(P) dD = \sum_{e \in \mathcal{E}(h)} \int_e N_h^e(P) \rho(P) dD. \quad (3.35)$$

Ricordando le espressioni delle funzioni di forma degli elementi date dalle formule (3.10) gli integrali sui singoli elementi si possono calcolare analiticamente (raramente) o numericamente: si usa in tal caso il metodo di integrazione con i punti di Gauss (vedi Appendice (A)).

Se la funzione $\rho(P)$ si riduce ad una costante ρ_0 questo si porta fuori del segno di integrale. L'integrale di una funzione di forma a piramide è uguale ad un terzo del prodotto dell'area di base A^e per l'altezza, che è unitaria. Quindi

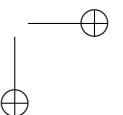
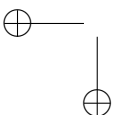
$$\{I19\} \quad s_h^e = \rho_0 \int_e N_h^e(P) dD = \frac{1}{3} A^e \rho_0 \quad \text{sorgente uniforme.} \quad (3.36)$$

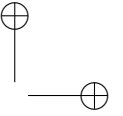
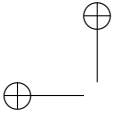
Calcolo dei c_h Esaminiamo separatamente il caso in cui il nodo h sia interno o di bordo.

a) nodo interno. Ricordando che la funzione N_h vale uno in h e zero sui lati che delimitano la regione Ω_h e sulla regione esterna ad Ω_h come mostra la figura (3.3a). Ne viene che sul bordo di Ω_h , essendo nulla la funzione, anche l'integrale al bordo si annulla.

b) nodo di bordo. Distingueremo due casi

- **nodo con funzione assegnata.** In questo caso, essendo già noto il valore nel nodo l'equazione non deve essere scritta e quindi il relativo coefficiente c_h non deve essere calcolato. Si noti che neanche può essere calcolato in quanto in questi nodi conosciamo il valore della funzione ma non conosciamo il valore della sua derivata normale.
- **nodo con flusso entrante assegnato.** In questo caso sulla parte del bordo $L = \partial\Omega_h$ che è interna al dominio $\bar{\Omega}$ l'integrale al bordo si annulla mentre sulla parte rimanente esso

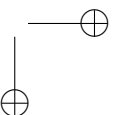
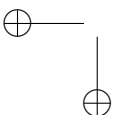


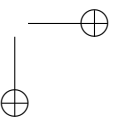
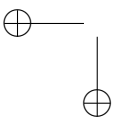
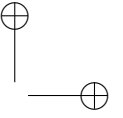
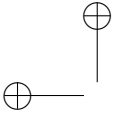


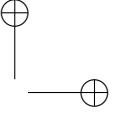
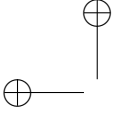
3.7. IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI

61

è uguale a $\int_L N_h q_n dL$. Dal momento che solo due tratti di bordo, L' ed L'' sono adiacenti al nodo h , indicati con q'_n e q''_n i flussi medi entranti il termine al bordo si riduce a $\frac{1}{2}(L' q'_n + L'' q''_n)$, come si vede dalla figura (3.3b).







Appendice A

Punti di Gauss

Ci proponiamo di indicare un procedimento *veloce* per valutare l'integrale di un polinomio $p(x)$ entro un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Si noti che l'integrale di un polinomio si può sempre eseguire con esattezza in quanto siamo in grado di eseguire gli integrali dei singoli monomi con la formula

{Gauss}

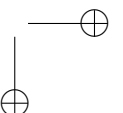
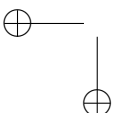
$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}). \quad (\text{A.1}) \quad \{\text{POL1}\}$$

L'obiettivo nostro è però di mostrare che *l'integrale di un polinomio si può fare ancora più velocemente, sempre in modo esatto, utilizzando i valori del polinomio in pochi punti x_k dell'intervallo: saranno questi i punti di Gauss.*

L'interesse di questo calcolo rapido sta nel fatto che ogni funzione continua si può approssimare (uniformemente) con un polinomio (teorema di Weierstrass). Quindi se si deve fare l'integrale di una funzione continua entro un intervallo finito $[a, b]$ si può fare l'integrale di un polinomio che approssimi la funzione entro tale intervallo. Ne viene che *un procedimento veloce per fare l'integrale **esatto** di un polinomio è nel contempo un procedimento veloce per fare l'integrale **approssimato** di una funzione continua.*

Il punto di partenza può essere la constatazione che l'integrale di un polinomio di primo grado, che è una funzione affine,

$$p(x) = a_0 + a_1 x \quad (\text{A.2}) \quad \{\text{POL2}\}$$



nell'intervallo canonico $[-1, 1]$, pur dipendendo da due costanti a_0 e a_1 , si può calcolare conoscendo il valore della funzione in un solo punto, il punto $x = 0$. Infatti

$$\{\text{POL3}\} \quad J = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 x) dx = 2 a_0 \quad \text{ovvero} \quad J = 2 p(0). \quad (\text{A.3})$$

come mostra la figura (A.1sopra)

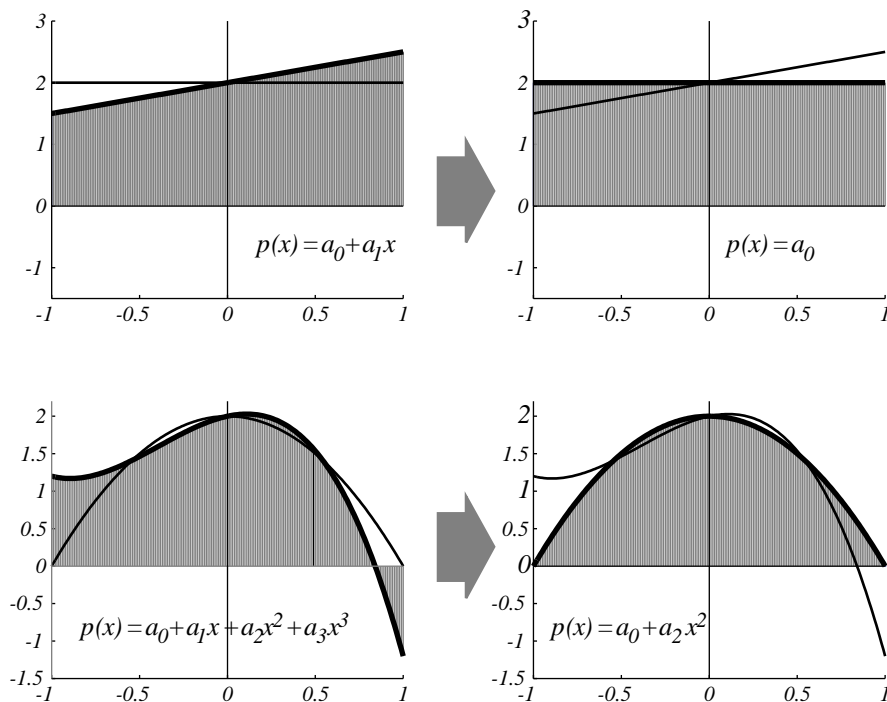
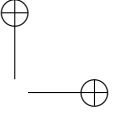
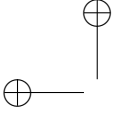


Figura A.1. *sopra* L'integrale di un polinomio del primo grado è uguale a quello del solo termine di grado zero; *sotto* L'integrale di un polinomio del terzo grado è uguale a quello del polinomio ottenuto sopprimendo i monomi dispari.

In particolare si noti che nel risultato non interviene la costante a_1 che è il coefficiente del monomio di grado dispari ma solo il coefficiente del monomio di grado pari. Questo è conseguenza del fatto che



l'integrale di una funzione dispari entro un intervallo simmetricamente disposto rispetto ad $x = 0$ è nullo.

Questa è una proprietà generale: *l'integrale di un polinomio entro un intervallo simmetrico rispetto all'origine coincide con quello che si ottiene sopprimendo nel polinomio i termini di grado dispari.*

Il nostro obiettivo è quello di determinare certe ascisse x_k e certi pesi w_k in modo da esprimere l'integrale definito mediante la formula

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k p(x_k) \quad (\text{A.4}) \quad \{\text{KYD5}\}$$

Procederemo in due fasi: dapprima sviluppiamo la formula (A.4) per l'intervallo canonico $[-1, +1]$ e poi estenderemo la formula ad un intervallo generico.

A.1 Intervallo canonico

Innanzitutto consideriamo un intervallo canonico $[-1, +1]$ e calcoliamo l'integrale di un polinomio di grado n .

$$J = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots + a_n\xi^n)d\xi \quad (\text{A.5})01$$

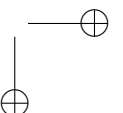
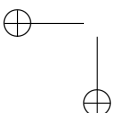
Scomponendo l'integrale in tanti integrali ci rendiamo conto che gli integrali delle potenze dispari nell'intervallo considerato si annullano. Infatti

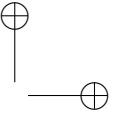
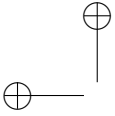
$$\int_{-1}^{+1} \xi d\xi = \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_{-1}^{+1} = 0 \quad \int_{-1}^{+1} \xi^3 d\xi = \left[\frac{\xi^4}{4} \right]_{-1}^{+1} = 0 \quad (\text{A.6})02$$

Ne viene che *nell'intervallo canonico $[-1, +1]$ il valore dell'integrale dipende solo dai termini di grado pari.* Per essi si ha

$$\int_{-1}^{+1} \xi^{2m} d\xi = \left[\frac{\xi^{2m+1}}{2m+1} \right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{2m+1} \quad (\text{A.7})03$$

Per mantenere l'esposizione ad un livello elementare consideriamo dapprima un polinomio di terzo grado poi uno di quinto grado.



**Polinomi di terzo grado.**

$$J = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3)d\xi = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_2\xi^2)d\xi = 2 \left[a_0 + \frac{a_2}{3} \right] \quad (\text{A.8})56$$

Dal momento che un polinomio di grado tre ha quattro coefficienti si vede come l'integrale del polinomio nell'intervallo considerato dipende solo dai coefficienti dei termini pari e quindi da due coefficienti.

Se indichiamo con g l'ascissa di un punto potremo scrivere

$$\begin{cases} p(+g) = a_0 + a_1g + a_2g^2 + a_3g^3 \\ p(-g) = a_0 - a_1g + a_2g^2 - a_3g^3. \end{cases} \quad (\text{A.9})05$$

Si vede che sommando le due equazioni scompaiono i coefficienti delle potenze dispari, proprio come accade nell'integrale (A.8). Questo è conseguenza dell'aver utilizzato un intervallo simmetrico rispetto all'ascissa $x = 0$. Si ottiene pertanto

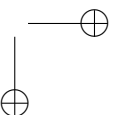
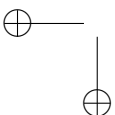
$$p(+g) + p(-g) = 2(a_0 + a_2g^2) \quad (\text{A.10})06$$

Confrontando questo risultato con quello della equazione (A.8) si vede che ponendo $g^2 = 1/3$ ovvero

$$\{\text{U5D3}\} \quad g = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0.5773502692 \quad (\text{A.11})$$

otteniamo esattamente la formula (A.8). 2 Le ascisse $g_1 = -g$ e $g_2 = +g$ sono quelle dei due punti di Gauss cercati [1, p.276]. In conclusione per un polinomio di terzo grado nell'intervallo canonico $[-1,+1]$ si ha

	<i>punti di Gauss</i>	<i>pesi</i>	
\{\text{DER9}\}	$g_1 = -0.5773502692 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$w_1 = 1$	(\text{A.12})
	$g_2 = +0.5773502692 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$	$w_2 = 1$	



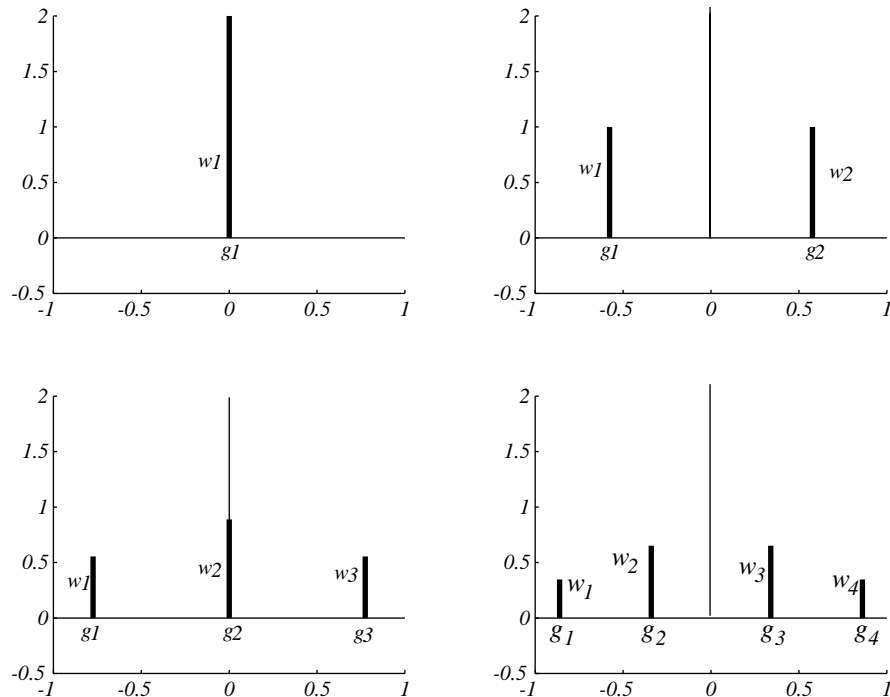
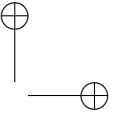
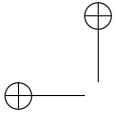


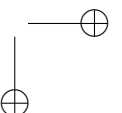
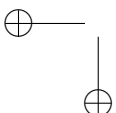
Figura A.2. La collocazione dei punti di Gauss per $n=1,2,3,4$ ed i {poli2} relativi pesi.

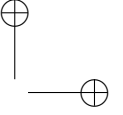
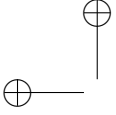
Polinomi di quinto grado.

$$\left\{ \begin{aligned} J &= \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5) d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4) d\xi \\ &= 2 \left[a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} \right]. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.13}) \quad \{\text{B05}\}$$

Dal momento che un polinomio di grado cinque ha sei coefficienti si vede come l'integrale del polinomio nell'intervallo considerato dipende solo dai coefficienti dei termini pari e quindi da tre coefficienti.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che è sufficiente valutare il polinomio $p(\xi)$ in due punti $+g$ e $-g$ simmetricamente disposti rispetto





all'origine. Vediamo se con tre valori simmetricamente disposti attorno all'origine (e quindi uno sarà necessariamente lo zero) possiamo valutare l'integrale con tre valori del polinomio. Se sono g_1, g_2, g_3 i tre punti dovrà essere $g_3 = -g_1$ e $g_2 = 0$. Quindi ci basta g_1 . Potremo scrivere

$$\begin{cases} p(+g_1) &= a_0 + a_1 g_1 + a_2 g_1^2 + a_3 g_1^3 + a_4 g_1^4 + a_5 g_1^5 \\ p(0) &= a_0 \\ p(-g_1) &= a_0 - a_1 g_1 + a_2 g_1^2 - a_3 g_1^3 + a_4 g_1^4 - a_5 g_1^5. \end{cases} \quad (\text{A.14})05$$

Si vede che sommando la prima e l'ultima equazione scompaiono i coefficienti delle potenze dispari, come nell'integrale (A.13). Si ottiene

$$p(+g_1) + p(-g_1) = 2(a_0 + a_2 g_1^2 + a_4 g_1^4). \quad (\text{A.15})06$$

Se si potesse trovare un g_1 tale che $g_1^2 = 1/3$ e $g_1^4 = 1/5$ avremmo risolto il problema. Dal momento che questo non è possibile proviamo a fare una combinazione lineare dei due termini usando due coefficienti w_2 e w_1 :

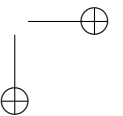
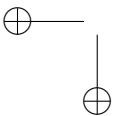
$$\begin{cases} J &= w_2 p(0) + w_1 [p(+g_1) + p(-g_1)] \\ &= w_2 a_0 + 2 w_1 (a_0 + a_2 g_1^2 + a_4 g_1^4) \\ &= (w_2 + 2 w_1) a_0 + 2 w_1 (a_2 g_1^2 + a_4 g_1^4) \end{cases} \quad (\text{A.16})07$$

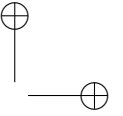
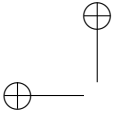
Confrontando questa espressione con quella data dalla (A.13) si vede che dovrà essere

$$(w_2 + 2 w_1) a_0 + 2 w_1 a_2 g_1^2 + 2 w_1 a_4 g_1^4 = 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} \right). \quad (\text{A.17})08$$

Se imponiamo l'uguaglianza dei coefficienti delle potenze simili otteniamo

$$\begin{cases} w_2 + 2 w_1 &= 2 \\ w_1 g_1^2 &= 1/3 \\ w_1 g_1^4 &= 1/5 \end{cases} \quad (\text{A.18})09$$





Dividendo la terza equazione per la seconda otteniamo

<i>punti di Gauss</i>	<i>pesi</i>
$g_1 = -0.77459666924148 = -\sqrt{3/5}$	$w_1 = +0.555555555555556 = +5/9$
$g_2 = 0$	$w_2 = +0.888888888888889 = +8/9$
$g_3 = +0.77459666924148 = +\sqrt{3/5}$	$w_3 = +0.555555555555556 = +5/9$

(A.19)11

che sono i tre punti di Gauss cercati con i relativi pesi [1, p.276]. Si può procedere analogamente per trovare l'integrale di un polinomio di grado arbitrario.

A.2 Intervallo generico

Se l'integrale da calcolare è da valutare nel generico intervallo $[a, b]$ invece che in $[-1, 1]$ occorre fare la trasformazione

$$x = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \xi \quad (\text{A.20}) \quad \{\text{HE6D}\}$$

Infatti questa relazione fa corrispondere a $\xi = -1$ il valore $x = a$ e a $\xi = +1$ il valore $x = b$. Quindi

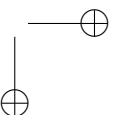
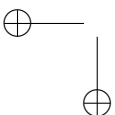
$$\int_a^b p(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^{+1} p(x(\xi))d\xi = \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_k w_k p(x_k) \quad (\text{A.21}) \quad \{\text{HSD6}\}$$

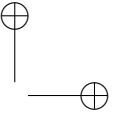
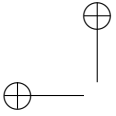
essendo

$$x_k = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) g_k \quad (\text{A.22}) \quad \{\text{JU29}\}$$

A.3 Esempio

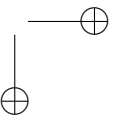
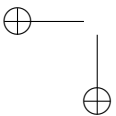
Supponiamo di dover calcolare l'integrale della funzione $f(x) = \sin(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ il cui valore esatto è 2. In questo caso si ha $a = 0$,

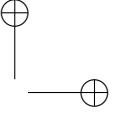
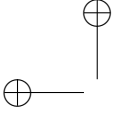




$b = 1$ e quindi $x_k = (1 + g_k)/2$. Indicheremo con ϵ l'errore percentuale.
Usando la formula (A.21) con 2,3,4 punti di Gauss si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{llll} n = 2 & g_1 = -0.5773502692 & w_1 = 1 & \\ & g_2 = +0.5773502692 & w_2 = 1 & J \approx 1.9358196 \quad \epsilon = -0.0320902 \\ n = 3 & g_1 = -0.7745966692 & w_1 = 0.5555555556 & \\ & g_2 = 0 & w_2 = 0.8888888889 & \\ & g_3 = +0.7745966692 & w_3 = 0.5555555556 & J \approx 2.0013889 \quad \epsilon = 0.0006945 \\ n = 4 & g_1 = -0.8611363115 & w_1 = 0.3478548451 & \\ & g_2 = -0.3399810435 & w_2 = 0.6521451548 & \\ & g_3 = +0.3399810435 & w_3 = 0.6521451548 & \\ & g_4 = +0.8611363115 & w_4 = 0.3478548451 & J \approx 1.9999842 \quad \epsilon = -0.0000079 \\ & & & \text{(A.23) \{FPZ7\}} \end{array} \right.$$





Appendice B

Regola di Cramer

Ricordiamo la regola di Cramer per la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari. {Cra}

Sistema 2x2.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (\text{B.1}) \quad \{\text{M34}\}$$

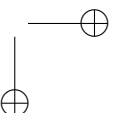
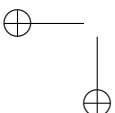
si può eliminare prima la y e poi la x mediante due combinazioni lineari: moltiplicando la prima equazione per d , la seconda per b e sottraendo si ottiene la

$$(da - bc)x = (dp - bq) \quad \text{e analogamente} \quad (cb - ad)y = (cp - aq) \quad (\text{B.2}) \quad \{\text{C35}\}$$

donde

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad (\text{B.3}) \quad \{\text{C36}\}$$

che costituisce la regola di Cramer per sistemi di due equazioni in due incognite.



Sistema 33. Sia dato il sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + mz = r \end{cases} \quad (\text{B.4})34$$

Portiamo a destra delle prime due equazioni il termine contenente z ottenendo:

$$\begin{cases} ax + by = p - cz \\ dx + ey = q - fz \\ gx + hy + mz = r \end{cases} \quad (\text{B.5})35$$

Risolviamo il sistema delle prime due equazioni con la regola di Cramer per sistemi 2×2 :

$$\{\text{HYY64}\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} p - cz & b \\ q - fz & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ep - bq}{ae - db} + \frac{bf - ce}{ae - db}z \quad (\text{B.6})$$

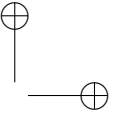
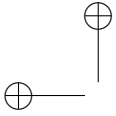
$$\{\text{HCX6}\} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p - cz \\ d & q - fz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{aq - dp}{ae - db} + \frac{cd - af}{ae - db}z \quad (\text{B.7})$$

Per semplificare l'espressione indichiamo con D il denominatore di queste quattro frazioni e moltiplichiamo per D la terza equazione (B.4) ottenendo

$$\{\text{MRC6}\} \quad gDx + hDy + mDz = Dr \quad (\text{B.8})$$

Sostituendo le espressioni testé trovate per la x e la y in funzione di z nella (B.8) si ottiene:

$$[g(bf - ce) + h(cd - af) + m(ae - bd)]z = [-g(ep - bq) - h(aq - dp) + r(ae - bd)] \quad (\text{B.9})36$$



donde

$$\{RT4Z\} \quad z = \frac{-g(ep - bq) - h(aq - dp) + r(ae - bd)}{g(bf - ae) + h(cd - af) + m(ae - bd)} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix}} \quad (B.10)$$

Per ragioni di simmetria è evidente che sarà anche

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix}} \quad (B.11) \quad \{IC6E\}$$

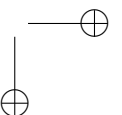
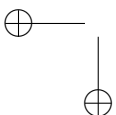
Ne viene di qui la regola di Cramer, valida anche per sistemi $n \times n$:

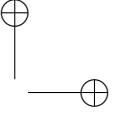
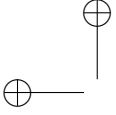
Regola di Cramer: *nella risoluzione di un sistema algebrico lineare di n equazioni in n incognite, ogni incognita è uguale al rapporto di due determinanti. Il determinante al denominatore è quello della matrice dei coefficienti mentre quello al numeratore è uguale a quello della matrice dei coefficienti in cui la colonna relativa alla incognita da determinare è sostituita dalla colonna dei termini noti*¹.

Dal momento che il denominatore non può essere nullo, ne viene che la soluzione del sistema si ha solo quando il determinante dei coefficienti è diverso da zero.

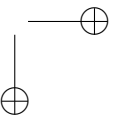
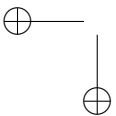
Nonostante la sua eleganza la regola di Cramer, che *di principio* è valida per sistemi di ordine qualsiasi, non è *di fatto* consigliabile per la risoluzione di sistemi superiori a 3×3 in quanto il numero dei soli prodotti da fare per calcolare un determinante di ordine n è pari a $n!$

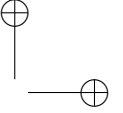
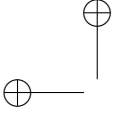
¹ Si veda l'Appendice (B).





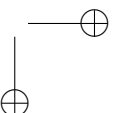
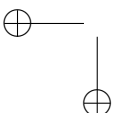
Ad esempio un determinante di ordine 10 ha $10! \approx 3.000.000$ di moltiplicazioni che sono tante anche per un calcolatore. Inoltre tali prodotti devono essere poi sommati algebricamente e questo introduce errori di arrotondamento che possono rendere inaccettabile l'errore della soluzione.





Bibliografia

- [1] Atkinson K.E., *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley & Sons, 1989
- [2] Bird
- [3] Brebbia C. A., and Connor J.J., *Fundamentals of Finite Elements Techniques*, Butterworths, London 1973;
- [4] Brenner S.C. and Scott R.L., *The Mathematical Theory of FEM*, Springer, 1994;
- [5] Burnett D.S., *Finite Element Analysis*, Addison Wesley, 1987;
- [6] Cesari F., *Introduzione al metodo degli elementi finiti*, Pitagora, Bologna, 1996;
- [7] Chari M. V. K. and Silvester P. P. , *Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems*, John Wiley & Sons;
- [8] Davies A.J., *The finite Element Method: A first Approach*, Clarendon Press, 1980;
- [9] Desai C.S. and Abel J.F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand, 1972;
- [10] Dhatt G., *The finite Element Method Displayed* Wiley, 1984;
- [11] Fenner R.T., *Finite Element Methods for Engineers*, Imperial College Press, 1996;
- [12] Huebner K.H., *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, 1975;
- [13] Irons B. and Ahmad S., *Techniques of finite elements*, Wiley;
- [14] Jackson
- [15] Jin J.M., *The Finite Element Method in Electro-Magnetics*, Wiley, 1993;
- [16] Livesley R.K., *Finite Elements, An Introduction for Engineers*, Cambridge Univ. Press, 1983;
- [17] Mitchell A.R., *Finite Element in Time Dependent Problems*, Academic Press, 1977;



- [18] Norrie D.H. and De Vries, *The Finite Element Method*, Academic Press, 1973;
- [19] Rao S.S., *The finite element method in engineering*; Pergamon Press, 1989;
- [20] Reddy J. N. , *An introduction to the finite element method*, Mc.Graw-Hill International Edition, 1984;
- [21] Silvester P.P. and Ferrari R.L., *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge Univ Press, 1983;
- [22] Strang G., *Introduction to Applied Mathematics*. Addison Wesley, Cambridge Press, 1986;
- [23] Strang G. and Fix G.J., *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973;
- [24] Schwarz H.R. and Witheman J.R., *Finite Elements Methods*, Academic Press, 1988;
- [25] Szabo B. and Babuska I., *Finite Elements analysis*, John Wiley, 1991;
- [26] White R.E., *An Introduction to FEM with Applications to Nonlinear Problems*, John Wiley, 1985;
- [27] White R.E. and Mitchell A.R., *An Introduction to FEM with Applications to Nonlinear Problems*, John Wiley, 1985;
- [28] Zienkiewicz O.C., *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, 1971.