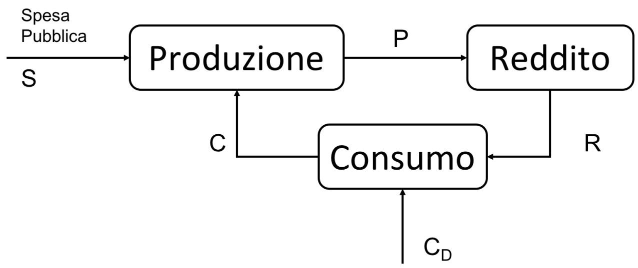
Fondamenti di Automatica — 5 Febbraio 2018
Teoria dei Sistemi — 5 Febbraio 2018



Ia figura rappresenta la dinamica semplificata di un sistema macroeconomico keynesiano, determinato dall'interazione fra **Produzione (P)**, **Reddito (R)** e **Consumi (C)** a livello nazionale. L'ingresso di controllo, **S**, rappresenta la **Spesa Pubblica**. Ciclicamente, il sistema è soggetto a variazioni sui livelli di consumo il cui effetto è rappresentato dalla variabile C_D, che rappresenta un disturbo rispetto alla normale evoluzione del sistema. Inoltre, il modello è soggetto ad un disturbo costante che rappresenta l'effetto del debito pregresso. Le equazioni che descrivono il modello sono:

$$\dot{P} = \beta S^2 - \pi C$$
$$\dot{C} = \lambda\sqrt{R} - \delta ln(\frac{P}{P_0}) + C_D$$
$$\dot{R} = \rho P - \eta C$$

dove β è il fattore di scala sull'ingresso mentre π, λ, δ, ρ, η sono i parametri che regolano l'influenza reciproca fra i sottosistemi. Tutte le variabili ed i coefficienti coinvolti sono da considerarsi espressi secondo l'opportuna unità di misura. La scala temporale è espressa in unità arbitrarie.

Si assuma che gli analisti siano in grado di stimare il rapporto fra i valori di Reddito e di Consumo

$$y = \frac{R}{C}$$

1 Si determini la condizione di equilibrio del sistema in funzione di un valore di Reddito costante $R = \bar{R}$ e considerando nullo il disturbo C_D.

2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla generica configurazione di equilibrio individuata al punto 1, considerando l'ingresso S all'equilibrio > 0

3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello: $P_0 = 0.1; \beta = 3; \pi = 7; \lambda = 10; \delta = 20; \rho = 40; \eta = 0.1; \bar{R} = 10;$.

- Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
- si ricavino le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo S e di disturbo C_D) e l'uscita y;
- si discuta circa la stabilità del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$G(s) = 27.684\frac{(s + 0.02046)}{(s + 17.69)(s - 16.14)(s - 1.551)}$$
$$G_d(s) = -0.00026456\frac{(s^2 + 1.944s + 5444)}{(s + 17.69)(s - 16.14)(s - 1.551)}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

4 Si sintetizzi un controllore che, agendo sull'ingresso S, e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio ($\bar{y} = 0.05$), rispetti le seguenti specifiche:

- Si desidera che, imposto un riferimento a rampa per la spesa pubblica del tipo $d(t) = 1t$, l'inseguimento si rifletta a regime in un errore massimo sull'uscita di 0.1 unità. Si richiede inoltre che il sistema macroeconomico porti esattamente l'uscita ad un valore di 1.05 senza mai superare il valore di 1.22. Si consideri inoltre che, trascorso un intervallo di tempo pari a 1 unità temporale (ut), l'uscita entri in un intervallo di $[1, 1.1]$ senza mai uscirne.
- Si desidera reiettare completamente un disturbo costante di tipo $C_D = 10$. Si desidera inoltre attenuare l'effetto di un disturbo agente sul consumo $C_D = 100\sin(\omega_d t)$ agente per pulsazioni $\omega_d < 0.1\,\mathrm{rad/ut}$ affinché le oscillazioni indotte sull'uscita y siano caratterizzate da un'ampiezza minore di 0.01.
- In presenza di un rumore di misura - che modella l'incertezza con cui gli analisti stimano l'uscita - caratterizzato da pulsazioni $\omega_\nu > 100 rad/ut$, si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore al 10% del rumore stesso.

Si riportino quindi, giustificando opportunamente tutti i passaggi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche e giustificando le scelte progettuali),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative e la verifica del soddisfacimento delle specifiche.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola_i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

La valutazione dell'esame è basata su quanto scritto sui fogli consegnati. OGNI passaggio ed ogni scelta di progettazione devono essere opportunamente giustificati su questi.

Condizioni di equilibrio

con $R=\bar{R}$ e $C_D=0$

$$\begin{cases} R=\bar{R} \rightarrow \dot{R}=0 \\ C_D=0 \\ P_{Eq}=cost \quad \dot{P}=0 \\ C_{Eq}=cost \quad \dot{C}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=\beta S_{Eq}^2-\pi C_{Eq} \Rightarrow \\ 0=\lambda\sqrt{\bar{R}}-\delta \ln\left(\frac{P_{eq}}{P_0}\right) \\ 0=\rho P_{eq}-\eta C_{eq} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{S_{eq}=\pm\sqrt{\frac{\pi}{\beta}\frac{\rho P_0}{\eta}e^{\frac{\lambda}{\delta}\sqrt{\bar{R}}}}}$$

$$\boxed{C_{eq}=\frac{\rho P_0}{\eta}e^{\frac{\lambda}{\delta}\sqrt{\bar{R}}}}$$

$$\delta \ln\left(\frac{P_{eq}}{P_0}\right)=\lambda\sqrt{\bar{R}} \qquad \frac{P_{eq}}{P_0}=e^{\frac{\lambda}{\delta}\sqrt{\bar{R}}} \qquad \boxed{P_{eq}=P_0\, e^{\frac{\lambda}{\delta}\sqrt{\bar{R}}}}$$

VALORI NUMERICI

$S_{eq}=21.3$ (nel testo dice di prendere il valore positivo)

$P_{eq}=0.49$

$C_{eq}=194.4$

LINEARIZZAZIONE

Variabili di stato

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P \\ C \\ R \end{bmatrix} \qquad y=\frac{R}{C}=\frac{x_3}{x_2} \qquad U=\begin{bmatrix} S & C_D \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1=\beta u_1^2-\pi x_2 \\ \dot{x}_2=\lambda\sqrt{x_3}-\delta \ln\left(\frac{x_1}{P_0}\right)+C_D \\ \dot{x}_3=\rho x_1-\eta x_2 \end{cases}$$

MATRICI SIMBOLICHE E NUMERICHE

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \frac{-\delta}{x_{1eq}} & 0 & \frac{\lambda}{2\sqrt{x_{3eq}}} \\ \rho & -\eta & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2\beta S_{eq} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \frac{x_{3eq}}{x_{2eq}^2} & \frac{1}{x_{2eq}} \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICI NUMERICHE

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 \\ -41.15 & 0 & 1.58 \\ 40 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 127.79 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.0003 & 0.005 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

$$G = \frac{27.136\,(s + 0.007606)}{(s+17.69)(s-16.14)(s-1.55)}$$

$$G_d = \frac{-0.0003\,(s^2 + 1.667\,s + 4}{(s+17.69)(s-16.14)(s-1.55)}$$

Il sistema risulta instabile in quanto ci sono due poli a parte reale positiva.

Controllore stabilizzante per la G

$$C_1 = 681.41 \; \frac{s+21.44}{s+77.07}$$

SPECIFICHE

- Rampa

Inseguimento a rampa con errore massimo 0.1 unità

$d(t) = 1t = bt$

$$\frac{b}{K_v} \leq 0.1 \qquad \frac{1}{K_v} \leq 0.1 \qquad K_v \geq 10$$

$$\|K_v\|_{dB} \geq 20\,dB$$

SOVRAELONGAZIONE

$$S_\% = \left\| \frac{y_{MAX} - y_\infty}{y_\infty - \bar{y}} \right\| \cdot 100 = \left\| \frac{1.22 - 1.05}{1.05 - 0.05} \right\| \cdot 100 = 17\%$$

SMORZAMENTO

$$\delta = \sqrt{\frac{(\ln(0.17))^2}{\pi^2 + (\ln(0.17))^2}} = 0.5 \qquad \Rightarrow M_\varphi = 50°$$

TASSESTAMENTO 5%

$$\omega_T \geq \frac{3}{\delta T_a} \qquad T_a = 1\ ut \quad \delta = 0.5$$

$$\omega_T \geq 6\ \frac{rad}{ut}$$

DISTURBO

- Disturbo costante reiettato dal fatto che nel 1° punto inseriamo un integratore

- Disturbo $C_D = 100 \sin(\omega_d t)$ $\omega_d < 0.1\ \frac{rad}{ut}$

$$\frac{\|G_{dc1}\|}{\|1 + C_2 G_{e1}\|} < \frac{Y}{F_d} \quad \frac{0.01}{100} \quad 10^{-4}$$

$\rightarrow$ in basse frequenze vale l'approssimazione

$$\|1 + C_2 G_{e1}\| \approx \|C_2 G_{e1}\|$$

$$\|C_2 G_{e1}\|_{dB} > \|G_{de1}\|_{dB} - 20\log_{10} 10^{-4}$$

$\rightarrow -50\,dB$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_d < 0.1\ rad/ut \\ \|C_2 G_{e1}\|_{dB} > 30\,dB \end{array}}$$

RUMORE DI MISURA

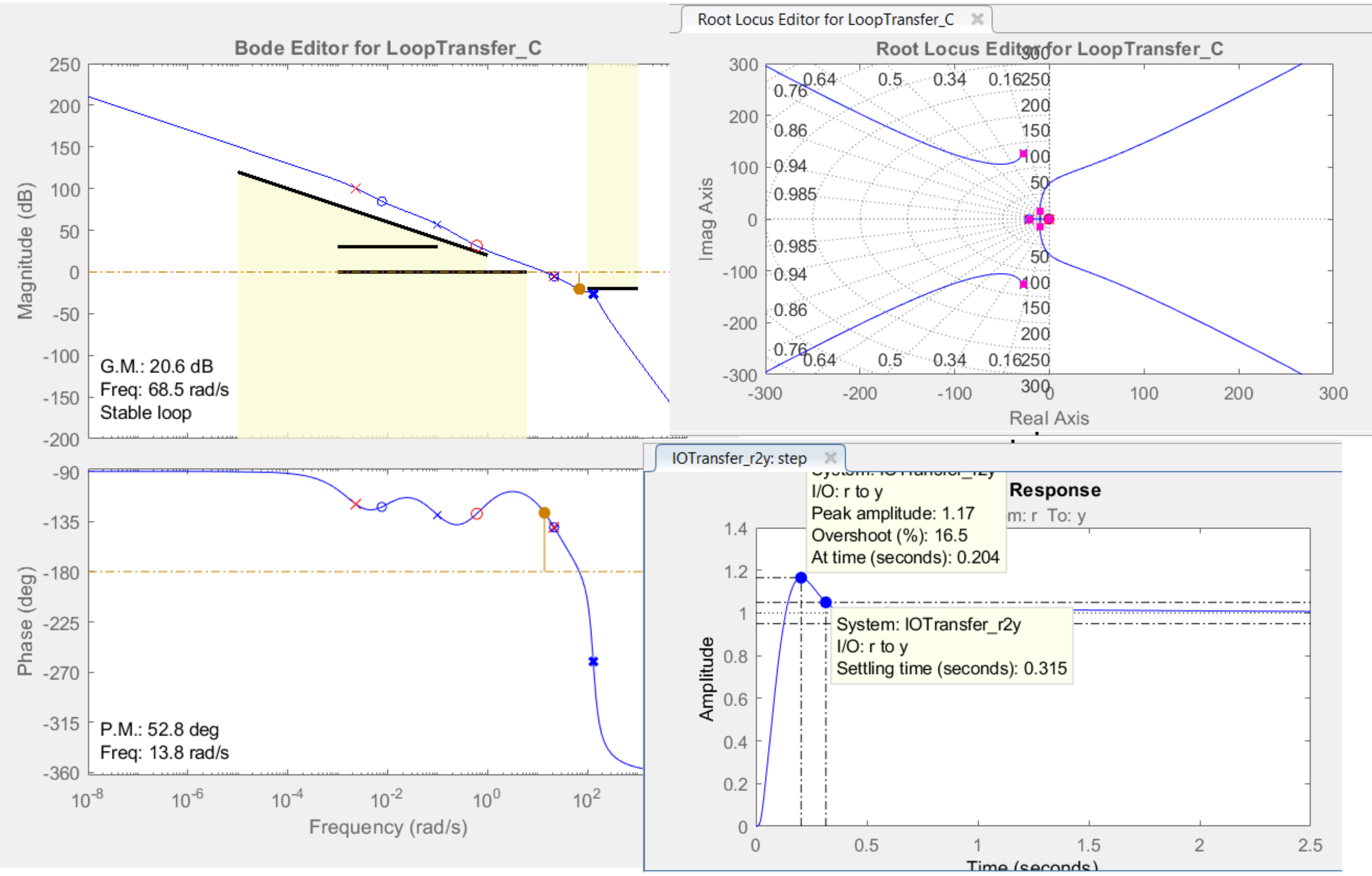
$\omega_\nu > 100$ rad/ut

$$\|C_2 G e_1\| \leq \frac{0.1 \cancel{AN}}{\cancel{AN}}$$

$$\boxed{\|C_2 G e_1\| \leq -20\,dB}$$

Controllore

$$C_2 = \frac{320.58\,(s+0.6074)}{s\,(s+0.002299)\,(s+21.12)}$$



Bode, rlocus e step del sistema controllato