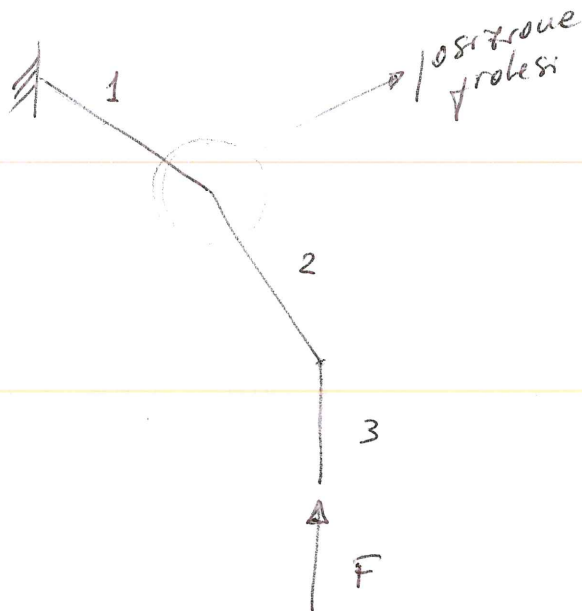


Compito del 15/01/16  
Importanti problemi

Correzione esercizio 1

- Equazioni della meccanica strutturale
- Per ipotesi, il sistema è allo stazionamento ( $\Rightarrow$  STATICA)
- Diagramma di corpo libero

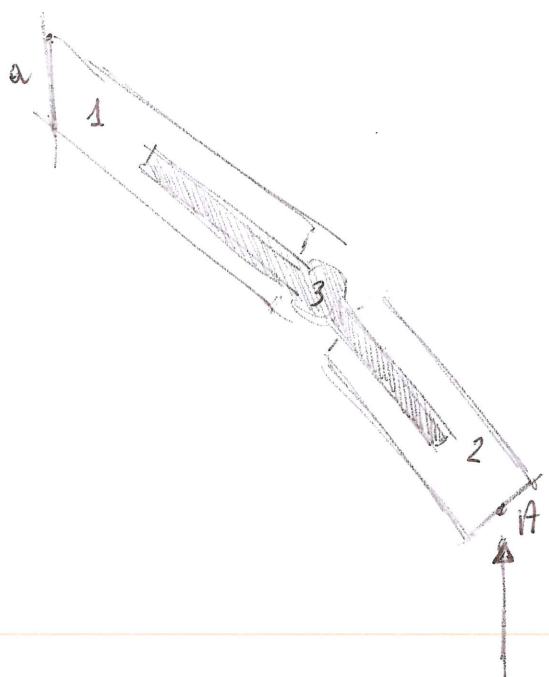


$F$  = forze di reazione  
→ stima 5 N

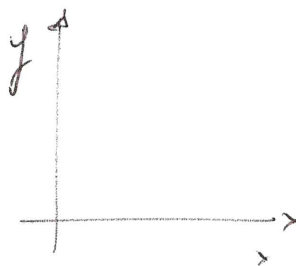
- considero tutta la struttura come corpo rigido (elimino le equazioni che descrivono le estremità)
- anche le reazioni muscolari sono trascurate

→ Modellazione ad elementi finiti di tipo PLANE STRESS.

→ Considerando che la protesi presenta un perno, la schematizzano come un corpo unico



1, 2  $\rightarrow$  osso residuo  
3  $\rightarrow$  protesi



$\rightarrow$  Definizione domini

	$E \text{ (Pa)}$	$\nu$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$
1, 2 (osso)	Matrice rig. osso	0.45	$10^3$
3 (protesi <del>CoCrMo</del> )	200 GPa	0.33	$8 \times 10^3$

$\rightarrow$  Condizioni al contorno

a  $\rightarrow$  spostamento nullo

altri  $\rightarrow$  nessun vincolo

$\rightarrow$  Condizioni sui punti

A  $\Rightarrow$  carico concentrato  $= -5 \text{ N } \hat{y}$

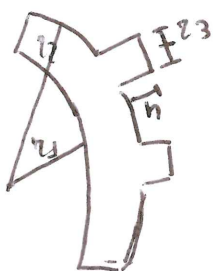
(non sono presenti altri momenti, rispetto al punto A causati dalla forza F)

$\rightarrow$  Il modello è pronto per essere risolto dopo aver discretizzato la geometria ottenendo una mesh.

$\rightarrow$  Per le domande teoriche, si consulti il materiale didattico

Esercizio n. 2.

1) Poiché la parte di innesto alla clavicola diventa solidale con la parte glenoidea e quindi posso applicare omogeneizzazione.



Poiché la parte di innesto si interfaccia con la testa della protesi posso eguagliare il tutto al modulo elastico dell'osso spugnoso.

Le particelle dimensionare sono

- 1) raggio esterno componente di innesto ( $r_2$ )
- 2) raggio interno componente di innesto ( $r_1$ )
- 3) spessore della struttura di innesto ( $d = r_2 - r_1$ )
- 4) altezza pilastro ( $h$ )
- 5) raggio pilastro ( $r_3$ )

Il raggio esterno  $r_2$  posso assumerlo pari al raggio della struttura glenoidea e quindi lo prendo dai dati anatomici dell'individuo quindi un parametro  $r_2 = r_{gl}$ .

Quindi devo determinare in tutto 3 parametri:

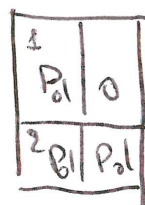
Posso approssimare la struttura lungo  $z$  come in figura tenendo conto delle simmetrie



$$E_{osso\ sens} = \frac{E_1 E_2}{f_1 E_1 + f_2 E_2}$$

$$E_2 = E_{pol}$$

$$E_1 = f'_{pol} E_{pol} + f''_o E_o$$



$$= 1$$

$$= 2$$

$$E_o = 500 \text{ MPa}$$

$$E_{osso\ sens} = 500 \text{ MPa}$$

(2)

Approssimo la struttura sottostante con un semiguscio sferico

$$\text{Volume semiguscio sferico} = \frac{2}{3} \pi (r_{\text{int}} + s_p)^3 - \frac{2}{3} \pi (r_{\text{int}})^3$$

$$\text{Volume semiguscio sferico} = 2\pi \left[ r_1^2 d + \frac{1}{3} d^3 \right]$$

Poiché solo la simmetria considero metà del guscio sferico

$$\frac{1}{2} V_{\text{sf}} = \pi \left( r_1^2 d + \frac{1}{3} d^3 \right) = V_1$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r_3^2 h = V_2$$

$$V_{\text{osso}} = \pi \left( r_2^2 h + \frac{1}{3} h^3 \right) - \pi r_3^2 h = V_3$$

$$V_{\text{TOT}} = V_1 + V_2 + V_3 = \pi \left( r_1^2 d + \frac{1}{3} d^3 \right) + \pi r_3^2 h + \pi \left( r_2^2 h + \frac{1}{3} h^3 \right) - \pi r_3^2 h = \pi \left[ r_1^2 d + \frac{1}{3} d^3 + r_2^2 h + \frac{1}{3} h^3 \right]$$

$$f_0 = \frac{V_3}{V_{\text{TOT}}} \quad f_{p12} = \frac{V_2}{V_{\text{TOT}}} \quad f_1 = f_0 + f_{p01}^1 \quad \text{dove}$$

$$f_{p01}^1 = f_{p12} \quad f_{p01}^1 = \frac{V_1 - V_2}{V_{\text{TOT}}}$$

$$\frac{f_1^1}{V_{\text{TOT}}} = \frac{V_0 + V_1 - V_2}{V_{\text{TOT}}} = \frac{V_0 + V_1 - V_2}{V_{\text{TOT}}} \quad f_0 + f_1 - f_2 = f_0 + f_1 - f_{p12}$$

$$f_{22} \quad f_{p01}^2 + f_{p12} = 2 f_{p12}$$

(3)

$$E_1 = (f_1' - f_{p12}) E_{pol} + f_0 E_0$$

$$E_{ossosano} = E_0 = \frac{[(f_1' - f_{p12}) E_{pol} + f_0 E_0] E_{pol}}{f_1' E_{pol} + 2 f_{p12} E_0}$$

$$f_1' E_{pol} E_0 + 2 f_{p12} E_0^2 = (f_1' - f_{p12}) E_{pol}^2 + f_0 E_0 E_{pol}$$

$$f_1' E_{pol} E_0 + 2 f_{p12} E_0^2 = f_1' E_{pol}^2 - f_{p12} E_{pol}^2 + f_0 E_0 E_{pol}$$

$$f_1' (E_{pol} E_0 - E_{pol}^2) + f_{p12} (2 E_0^2 + E_{pol}^2) = f_0 E_0 E_{pol} \quad \text{1° equaz}$$

$$(f_0 + f_1 - f_{p12}) (E_{pol} E_0 - E_{pol}^2) + f_{p12} (2 E_0^2 + E_{pol}^2) = f_0 E_0 E_{pol}$$

$$\cancel{f_0 E_{pol} E_0} - f_0 E_{pol}^2 + f_1 (E_{pol} E_0 - E_{pol}^2) - f_{p12} (E_{pol} E_0 - E_{pol}^2) + f_{p12} (2 E_0^2 + E_{pol}^2) = \cancel{f_0 E_0 E_{pol}}$$

$$f_1 (E_{pol} E_0 - E_{pol}^2) + f_{p12} (2 E_0^2 + 2 E_{pol}^2 - E_{pol} E_0) = f_0 E_{pol}^2 \quad \text{2°}$$

lungo x y

pol	φ
pol	pol

1
2

$$E_0 = f_1' E_1 + f_2 E_2$$

$$f_2 = 2 f_{p12} \quad E_2 = E_{pol}$$

$$E_1 = \frac{E_{pol} E_0}{f_1' E_{pol} E_0 + f_0 E_{pol}} = \frac{E_{pol} E_0}{(f_0 + f_1 - f_{p12}) E_0 + f_0 E_{pol}}$$



(4)

$$E_0 = f_1' E_1 + f_2' E_1 = (f_0 + f_1 - f_{p12}) \frac{E_{p01} E_0}{(f_1 - f_{p12}) E_0 + f_0 E_{p01}} + 2 f_{p12} E_{p01}$$

$$E_0 = \frac{(f_0 + f_1 - f_{p12}) E_{p01} E_0 + 2 f_{p12} E_{p01} E_0 (f_1 - f_{p12}) + 2 f_{p12} f_0 E_{p01}^2}{(f_1 - f_{p12}) E_0 + f_0 E_{p01}}$$

$$\frac{f_0 E_{p01} E_0 + f_1 E_{p01} E_0 - f_{p12} E_{p01} E_0 + 2 f_{p12} f_1 E_{p01} E_0 - 2 f_{p12}^2 E_{p01} E_0}{(f_1 - f_{p12}) E_0 + f_0 E_{p01}} + 2 f_{p12} f_0 E_{p01}^2 = E_0$$

II e equacao

$$f_1' + f_2 = 1 \Rightarrow 1 = f_0 + f_1 - f_{p12} + 2 f_{p12} \Rightarrow$$

$$f_0 + f_1 + f_{p12} = 1. \quad \text{III e equacao}$$

Substituindo valores:

$$\begin{cases} \text{I} & f_1 (20 \cdot 10^{16} - 16 \cdot 10^{16}) + f_{p12} (50 \cdot 10^{16} + 8 \cdot 10^{16} - 20 \cdot 10^{16}) = f_0 16 \cdot 10^{16} \\ \text{II} & 5 \cdot 10^8 = \frac{f_0 20 \cdot 10^{16} + f_1 20 \cdot 10^{16} - f_{p12} 20 \cdot 10^{16} + 40 \cdot 10^{16} f_{p12} f_1 - f_{p12}^2 40 \cdot 10^{16}}{(f_1 - f_{p12}) \cdot 5 \cdot 10^8 + f_0 4 \cdot 10^8} \\ \text{III} & f_0 + f_1 + f_{p12} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 f_1 + 38 f_{p12} = 16 f_0 \\ \frac{20 f_0 + 20 f_1 - 20 f_{p12} + 40 f_1 f_{p12} - 40 f_{p12}^2 + 16 f_{p12} f_0}{(f_1 - f_{p12}) 5 + 4 f_0} = 5 \\ f_0 + f_1 + f_{p12} = 1 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} p_0 + p_1 + p_{12} = 1 \\ 4p_1 + 38p_{12} = 16p_0 \end{cases}$$

$$20p_0 + 20p_1 - 20p_{12} + 40p_1 p_{12} = 40p_{12}^2 + 16p_{12}p_0 = 20p_0 + 15p_1 - 13p_{12}$$

$$\begin{cases} p_0 + p_1 + p_{12} = 1 \\ 4p_1 + 38p_{12} = 16p_0 \\ -5p_1 + 5p_{12} + 40p_1 p_{12} - 40p_{12}^2 + 16p_{12}p_0 = 0 \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{4p_1 + 38p_{12}}{16} \quad \text{alle 3} \quad \text{substituto in 1}$$

$$\begin{cases} \frac{4p_1}{16} + \frac{38p_{12}}{16} + p_1 + p_{12} = 1 \end{cases}$$

$$4p_1 + 38p_{12} + 16p_1 + 16p_{12} = 16$$

$$20p_1 + 54p_{12} = 16$$

$$p_1 = \frac{16 - 54p_{12}}{20} \quad \text{substituto in 3}$$

$$-\frac{5}{20} (1 - 54p_{12}) + 5p_{12} + 40 \frac{(1 - 54p_{12})}{20} p_{12} - 40p_{12}^2 + 16p_{12} \cdot \frac{4p_1}{16} = 0$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{54}{4} p_{12} + 5p_{12} + 2p_{12}^2 - 40p_{12}^2 + 4p_1 p_{12} + 608p_{12}^2 = 0$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{78}{4} p_{12} + 500p_{12}^2 + 4p_{12} (1 - 54p_{12}) = 0$$

(6)

$$-\frac{1}{4} - \frac{78}{4} k_{p12} + 500 k_{p12}^2 + \frac{k_{p12}}{5} - \frac{54}{5} k_{p12}^2 = 0$$

$$-5 - 390 k_{p12} + 10000 k_{p12}^2 + 4 k_{p12} - 216 k_{p12}^2 = 0$$

$$9784 k_{p12}^2 - 386 k_{p12} - 5 = 0$$

$$k_{p12} = \frac{143 \pm \sqrt{37249 + 48970}}{9784} = \frac{143 \pm \sqrt{86169}}{9784} = \begin{cases} \frac{143 + 293.5}{9784} \approx 0.05 \\ \frac{143 - 293.5}{9784} \text{ descartato} \end{cases}$$

$$k_{p12} = 0.05$$

$$f_1 = 0.68$$

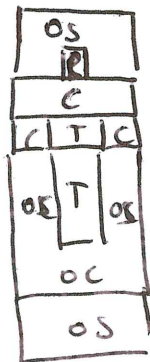
$$f_0 = 0.27$$

b) Per la testina della protesi so che il raggio della testina è pari ad  $r_1$  che differisce delle frizioni prodotte e posso approssimarlo ad uno semicircolo.

c) Schematizzazione.



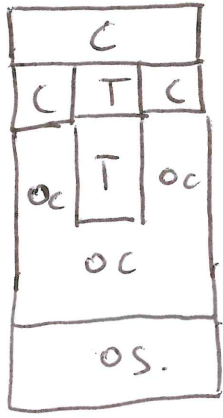
$\Rightarrow$



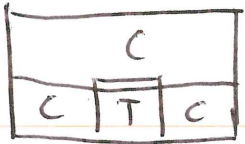
$\Rightarrow$  considero solo la parte della protesi mobile poiché il <sup>cuscinetto</sup> ~~cuscinetto~~ è vincolato alla zona osseointegrata.



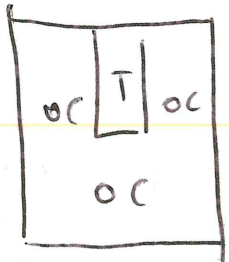
(7)



poiché la struttura deve comportarsi come una struttura omogenea reale posso dire che

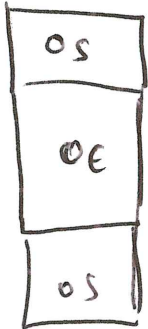


è simile ad osso spugnoso  $f_{vol} = 10\%$ .



è simile ad osso compatto  $f_{vol} = 80\%$ .

Quindi ho



$$E_z = \frac{E_{os} E_{oc}}{2f_{os} E_{oc} + f_c E_{os}} = \frac{500 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot 10^9}{0.2 \cdot 17 \cdot 10^9 + 0.8 \cdot 500 \cdot 10^6}$$

$$= \frac{85 \cdot 10^{17}}{3.4 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^8} = \frac{85 \cdot 10^{17}}{3.8 \cdot 10^9} = 22.4 \cdot 10^8$$

$$= 2.24 \text{ GPe.}$$

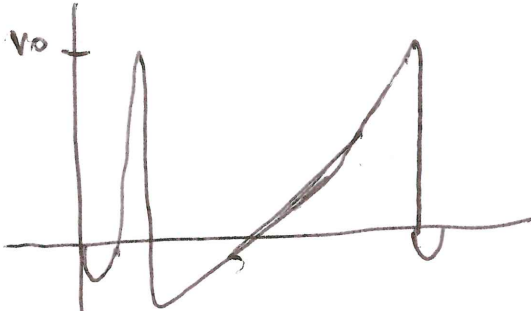
$$E_{xy} = 2f_{os} E_{os} + f_c E_c = 0.2 \cdot 500 \cdot 10^6 + 0.8 \cdot 17 \cdot 10^9 = 10^8 + 9.6 \cdot 10^9 =$$

$$= 9.7 \cdot 10^9 = 9.7 \text{ GPe.}$$

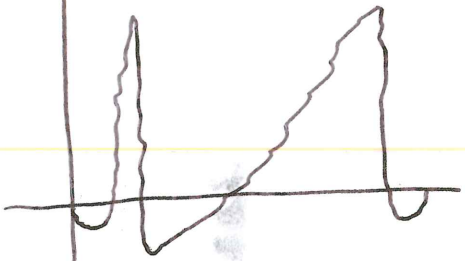
# Sercizio 3

1) Vedi appunti in rete

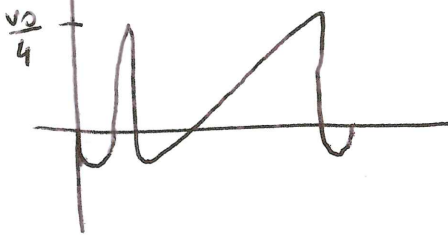
2) profilo ideale valvola



con granuli



con fluido  
viscoso



## Esercizio 4

a) Veri appunti in rete

b)  $\Delta p = 10 \text{ mmHg} \approx 1333 \text{ Pa}$

$P_{\text{coda}} = 30 \text{ MPa}$

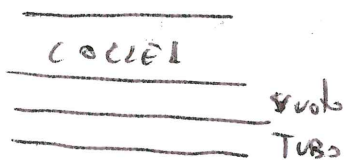
Per la legge di Laplace la tensione alle pareti del tubo è pari a

$$T = \frac{\Delta p \cdot r}{d} = \frac{1333 \text{ Pa} \cdot 0.5}{0.1} = 6665 \text{ Pa}$$

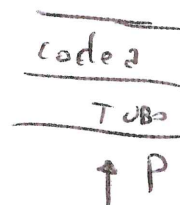
E per trovare le allunghe relative  $\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{0.3 - 0.1}{0.1} = 2$

$\sigma = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{6665}{2} = 3332.5 \approx 3.3 \text{ MPa}$

Guardando in sezione



quando si deforma



ho un reuss dove vince l'elemento più elastico che è il tubo e che essendo molto più elastico della coda non ne altera la meccanica.