

Università degli Studi di Pisa  
Facoltà di Ingegneria

**Centro Interdipartimentale  
“Enrico Piaggio”**

APPUNTI DELLE LEZIONI

**Studio di sistemi affetti da non linearità di attuazione e di misura**

**Corso di “Controlli Automatici”**

# Indice

<b>1</b>	<b>Trasduttori di misura per il controllo dei processi</b>	<b>5</b>
1.1	Introduzione . . . . .	5
1.2	Caratteristiche tipiche della risposta dei trasduttori di misura	7
1.2.1	Il fenomeno di isteresi . . . . .	11
1.3	Effetto di carico e ritardo . . . . .	12
1.3.1	Le approssimanti di Padé . . . . .	14
1.4	Selettività dei trasduttori . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Sistemi non lineari in retroazione</b>	<b>21</b>
2.1	Introduzione . . . . .	21
2.2	Il criterio del cerchio . . . . .	22
2.3	Il criterio di Popov . . . . .	26
2.3.1	Esempio numerico . . . . .	30
2.4	Criterio generalizzato del cerchio . . . . .	31
2.5	Spostamento delle singolarità . . . . .	33
2.5.1	Spostamento dei poli . . . . .	33
2.5.2	Spostamento degli zeri . . . . .	35
2.6	Esempio riassuntivo . . . . .	37
2.7	Effetti del ritardo sul sistema in retroazione . . . . .	39
2.7.1	Esempi . . . . .	40
2.8	Il Principio del Modello Interno . . . . .	41
2.8.1	Il compensatore di Smith . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Il fenomeno delle autoscillazioni</b>	<b>48</b>
3.1	Introduzione . . . . .	48
3.2	Funzione Descrittiva . . . . .	50
3.2.1	Stabilità delle autoscillazioni . . . . .	52
3.2.2	Funzione Descrittiva di alcune tipiche non linearità . . . . .	55
3.2.3	Simulazioni ed esercizi sulla Funzione Descrittiva . . . . .	60
3.2.4	Legame tra Funzione Descrittiva e Criterio del Cerchio . . . . .	64
3.3	Il fenomeno del salto . . . . .	66

3.3.1	Il Criterio del Cerchio Incrementale . . . . .	71
-------	--	----

# PREFAZIONE

In queste note si intende fornire alcuni elementi per la progettazione di sistemi di controllo per impianti e processi di interesse industriale. Le competenze necessarie a tale scopo sono naturalmente molto vaste, e sono di norma coperte da corsi quali *Teoria dei Sistemi*, *Controlli Automatici*, *Modellistica e Identificazione*, *Controllo dei Processi* ed altri, oltre a quello dei *Sistemi per l'Automazione*, cui si riferiscono queste note. L'obiettivo particolare di queste note è quello di illustrare la tecnologia degli strumenti per il controllo e del relativo impatto che hanno con il sistema da controllare. Per "tecnologia" si intende quel complesso di informazioni che permettono all'ingegnere di passare dal diagramma a blocchi che schematizza il processo, ad una progettazione dettagliata del sistema, alla scelta delle componenti, ed alla effettiva realizzazione del sistema stesso.

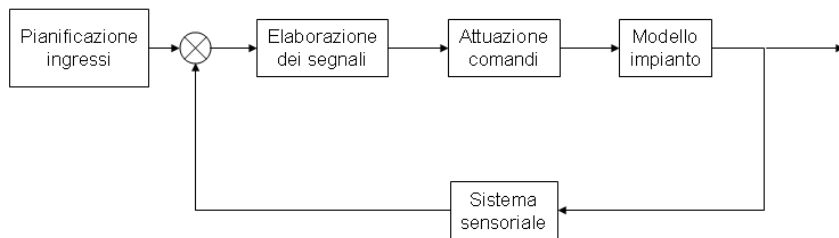


Figura 1: Gli elementi di un sistema di controllo.

Gli elementi, o sottosistemi, che sostituiscono di un tipico sistema di controllo sono mostrati in figura 1. Alla illustrazione del reale "contenuto" di questi blocchi e del relativo impatto sul sistema nella sua globalità è dedicata gran parte di queste note.

# Capitolo 1

## Trasduttori di misura per il controllo dei processi

### 1.1 Introduzione

L'esame delle componenti di un sistema di controllo viene iniziato in questo capitolo con l'esposizione dei principi di funzionamento e delle caratteristiche tecnologiche di alcuni trasduttori usati per la misura delle grandezze fisiche oggetto del controllo.

Come già accennato nella introduzione, il ruolo degli elementi di misura nel sistema di controllo è di importanza fondamentale ed in un certo senso superiore a quella di ogni altro elemento dello schema a blocchi di figura 1. Per giustificare questa affermazione, è opportuno richiamare alcune semplici considerazioni sulla sensibilità dei sistemi di controllo agli errori ed ai disturbi, già note dal corso di Controlli Automatici.

Si consideri, per semplicità, un sistema di controllo ad un ingresso ed una uscita, applicato ad un processo il cui modello lineare è rappresentato dalla funzione di trasferimento  $P(s)$  (vedi figura 1.1).

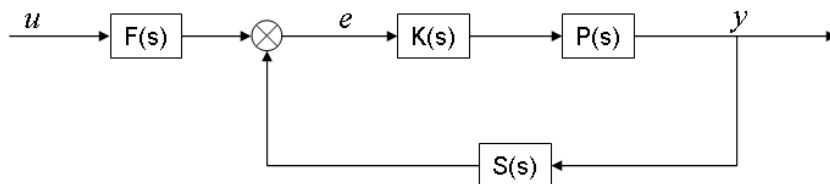


Figura 1.1: Sistema di controllo.

Si supponga ancora che gli elementi introdotti per controllare il processo, cioè il compensatore, il trasduttore ed il precompensatore, siano anch'essi lineari (come è verosimile che sia), e rappresentati dalle loro rispettive funzioni di trasferimento  $K(s)$ ,  $S(s)$ ,  $F(s)$ .

Consideriamo dapprima la sensibilità della risposta del sistema (ovvero, della sua funzione di trasferimento globale) alle difformità di comportamento delle componenti rispetto a quello nominale. Queste difformità sono modellate nel modo più semplice come variazioni di un parametro significativo. Omettendo, per semplicità di notazione, la dipendenza esplicita dalla variabile complessa  $s$  e detta  $G = PKF/(1 + PKS)$  la f.d.t. ad anello chiuso, le sensibilità relative dei diversi elementi rispetto alla variazione dei parametri  $\alpha_P, \alpha_F, \alpha_K, \alpha_S$  dai valori nominali  $\alpha_P^0, \alpha_F^0, \alpha_K^0, \alpha_S^0$  sono pertanto

$$\begin{aligned}
\Sigma_P(G) &= \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \alpha_P} \Big|_{\alpha_P^0} \Delta \alpha_P = \frac{1+PKS}{PKF} \frac{PKF}{(1+PKS)^2} \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{1+PKS} \frac{\Delta P}{P} \\
\Sigma_F(G) &= \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \alpha_F} \Big|_{\alpha_F^0} \Delta \alpha_F = \frac{\Delta F}{F} \\
\Sigma_K(G) &= \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K^0} \Delta \alpha_K = \frac{1}{1+PKS} \frac{\Delta K}{K} \\
\Sigma_S(G) &= \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \alpha_S} \Big|_{\alpha_S^0} \Delta \alpha_S = \frac{-PKS}{1+PKS} \frac{\Delta S}{S}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Si osservi che la sensibilità agli errori di precompensazione  $\Sigma_F(G)$  è totale (come è naturale, essendo questo elemento in anello aperto), mentre la sensibilità alle variazioni dei parametri nel processo  $\Sigma_P(G)$  o agli errori nel controllore  $\Sigma_K(G)$  è bassa se è alto il guadagno di anello  $PK$ . Infine la sensibilità agli errori nella modellazione del sensore  $\Sigma_S(G)$  è alta in anello chiuso, e lo è tanto più quanto più alto è il guadagno di anello, essendo  $|\Sigma_S(G)| = \frac{|\Delta S|}{|S|}$  per  $|PK| \rightarrow \infty$ .

Dallo schema di figura 1.2 è poi possibile osservare come anche la sensibilità ai disturbi sul sistema può essere ridotta agevolmente aumentando il guadagno di anello (ossia  $K$ ) nel caso in cui essi agiscano sulla catena diretta, ( $d_1$  e  $d_2$ ). Si noti però che i sistemi in retroazione hanno una sensibilità pressoché unitaria ai disturbi di misura ( $d_3$ ). Vale infatti la relazione:

$$Y(s) = \frac{PKF}{1 + PKS} U(s) + \frac{P}{1 + PKS} d_1(s) + \frac{1}{1 + PKS} d_2(s) - \frac{PK}{1 + PKS} d_3(s) \tag{1.2}$$

Da queste premesse si comprende bene l'estrema importanza della “buona qualità” delle misure di un sistema di controllo. Alla definizione più precisa di che cosa si intenda per “buona qualità” è dedicato il prossimo paragrafo.

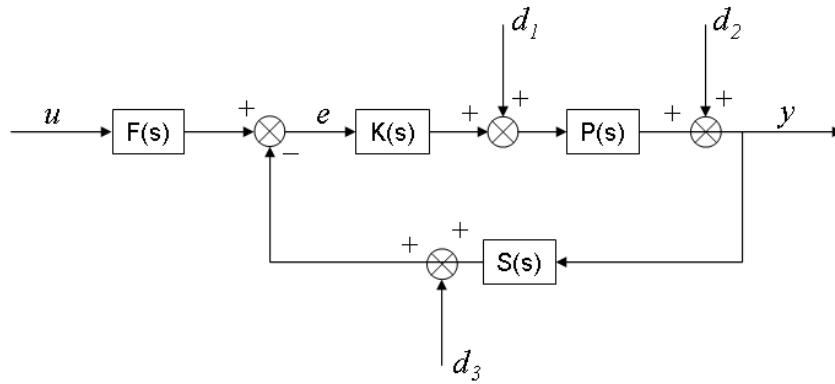


Figura 1.2: Sensibilità ai disturbi posti in vari punti del sistema.

## 1.2 Caratteristiche tipiche della risposta dei trasduttori di misura

La quantificazione delle caratteristiche funzionali dei componenti che entrano in un sistema di controllo è fondamentale per poter prevedere le prestazioni del sistema nel suo complesso. Nel seguito si cercherà di fornire caso per caso una discussione di quali caratteristiche siano critiche per i componenti in esame. A tal proposito, si premette una discussione sulla terminologia adottata per descrivere le qualità dei diversi trasduttori.

Ci si riferirà inizialmente ad una ipotetica risposta  $y$  (uscita o misura) generata dal sensore sollecitato da un ingresso  $u$  (grandezza da misurare), di un sistema di misura *monovariabile e quasi-statico* (cioè con caratteristiche dinamiche molto più veloci di quelle possedute dai segnali da misurare), riportata in figura 1.3.

La curva di figura 1.3 è tipicamente ottenuta per via sperimentale, effettuando un gran numero di prove di misura con diversi ingressi ed elaborando i dati ottenuti statisticamente. Siano, ad esempio,  $y_s^1 y_s^2 \dots y_s^N$  le  $N$  misure ottenute in corrispondenza di un ingresso  $u_s$ . Il punto  $y_s$  della curva di risposta riportato in figura è ottenuto come media degli  $N$  campioni

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^N y_s^i}{N} = E[y] \quad (1.3)$$

mentre l'associato campo di confidenza è ottenuto in base alla deviazione

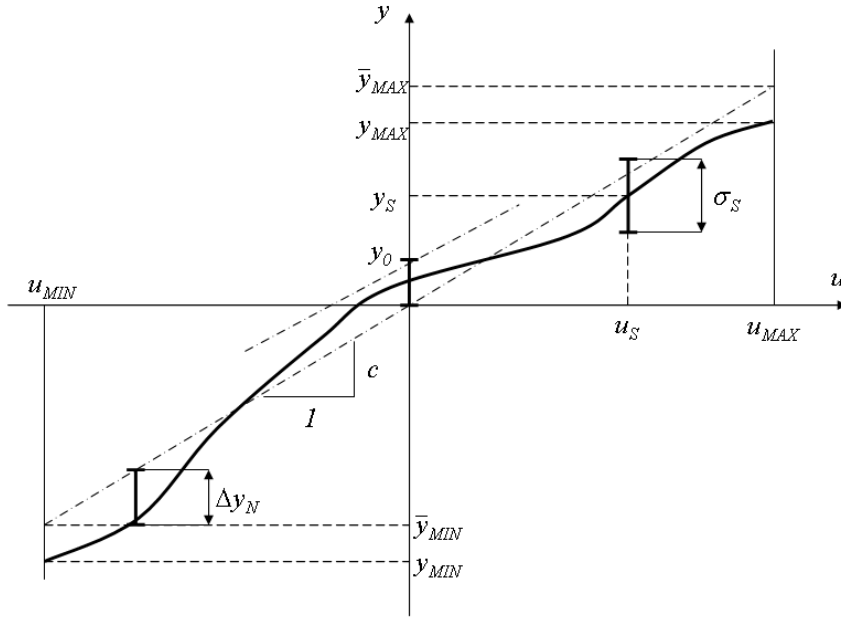


Figura 1.3: Tipica risposta quasi-statica di un trasduttore monovariabile.

standard

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_s^i - y_s)^2}{N}} = \sqrt{(y - y_s)^2} \quad (1.4)$$

Si ricordi che per distribuzioni Gaussiane la probabilità che l'errore di misura  $|y_s^i - y_s|$  sia minore di  $0.675 \sigma_s$  è del 50%, minore di  $\sigma_s$  è del 68,3% e minore di  $2 \sigma_s$  è del 95,4%.

La curva a tratto pieno in figura 1.3 rappresenta la risposta media misurata sperimentalmente al variare dell'ingresso  $u$  dal valore minimo  $u_{MIN}$  al valore  $u_{MAX}$  del campo d'ingresso (input range) consentito per il sensore. I valori corrispondenti a tali estremi, rispettivamente  $y_{MIN}$  ed  $y_{MAX}$ , definiscono a loro volta il campo di uscita (output range), assumendo che la  $\bar{y}_s(u)$  sia monotona. I valori estremi del campo di ingresso possono rappresentare, a seconda dei casi, dei valori limite invalicabili, pena il deterioramento del trasduttore, ovvero limiti "nominali" da superarsi solo occasionalmente in caso di picchi sporadici del segnale di ingresso, ovvero valori entro i quali certe prestazioni (ad esempio, linearità della caratteristica) sono garantite dal costruttore.

Nella grande maggioranza dei trasduttori di misura la relazione ingresso-uscita più desiderabile è quella lineare. Per questo motivo si definisce la



“risposta nominale” dei trasduttori come la risposta lineare che meglio approssima quella sperimentale. Usualmente il criterio di approssimazione è quello dei minimi quadrati. La risposta nominale - miglior approssimazione nel senso dell’errore quadratico medio - del trasduttore di figura 1.3 è rappresentata da una linea a tratti.

Indicando la risposta effettiva con  $y(u)$  e quella nominale con  $\bar{y} = cu + b$ , si determina la scelta delle costanti  $c$  e  $b$  con

$$c, b = \arg \min \int_{u_{MIN}}^{u_{MAX}} (y(u) - cu - b)^2 du \quad (1.5)$$

Se, come più spesso accade, sono note  $M$  coppie  $(u_j, y_j)$  con  $j = 1, 2, \dots, M$ , si ha esplicitamente

$$c, b = \arg \min \sum_{j=1}^M (y_j - cu_j - b)^2 \quad (1.6)$$

allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} (\sum_{j=1}^M (y_j - cu_j - b)^2) &= -2 \sum_{j=1}^M (y_j - cu_j - b) = 0 \Rightarrow b = \frac{\sum_{j=1}^M (y_j - cu_j)}{M} \\ \frac{\partial}{\partial c} (\sum_{j=1}^M (y_j - cu_j - b)^2) &= -2 \sum_{j=1}^M (y_j - cu_j - b)u_j = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove, una volta sostituito nella seconda delle 1.7 il valore calcolato per  $b$ , si ottiene

$$c = \frac{\sum_{j=1}^M y_j \sum_{j=1}^M u_j - M \sum_{j=1}^M y_j u_j}{(\sum_{j=1}^M u_j)^2 - M \sum_{j=1}^M u_j^2} \quad (1.8)$$

Si noti come, nella procedura di approssimazione lineare, ricavare prima la risposta media non lineare per poi approssimarla non è equivalente ad applicare la approssimazione lineare ai minimi quadrati direttamente a tutte le coppie di valori ottenute sperimentalmente.

Con riferimento alla risposta nominale del trasduttore, si possono individuare alcune importanti caratteristiche, quali:

- Sensibilità (o guadagno)  $c$ , ossia, con riferimento alla figura 1.3 la pendenza della retta della risposta nominale. La sensibilità può venire talvolta definita puntualmente come la pendenza della retta tangente alla curva di risposta del trasduttore. In questo caso non è necessario riferirsi alla risposta nominale in quanto la sensibilità diviene funzione dell’ingresso

- Campo di uscita nominale ( $\bar{y}_{MAX}$  e  $\bar{y}_{MIN}$  in figura 1.3) dato dalla differenza tra le risposte nominali e corrispondenti agli estremi del campo in ingresso
- Offset  $y_0$ , lettura del sensore ad ingresso nullo
- Risoluzione (o errore di quantizzazione), ossia la più piccola differenza tra i valori di ingresso che il trasduttore è in grado di risolvere in uscita. Questa grandezza è importante nei trasduttori con uscita digitale: ad esempio, un trasduttore ad 8-bit è in grado di risolvere 256 livelli sul suo campo di ingresso. Può comunque applicarsi anche ad altri trasduttori, quali ad esempio i potenziometri a filo, in cui questo è avvolto a spira, il cui campo rappresenta la misura
- Errore globale (o precisione): è la massima deviazione della uscita dal valore ideale, nel campo di ingresso. Viene tipicamente fornita dai costruttori in termini statistici, usando come riferimento (nella impossibilità di dare un “valore vero” all’ingresso) le misure di un trasduttore di riferimento, con precisione superiore. Per sensori senza offset e con sensibilità  $c$ , la variabile aleatoria che viene utilizzata è del tipo  $e = \frac{y}{c} - u_{Rif}$ , dalla quale si possono ad esempio ottenere due valori indicanti la precisione del sensore con

$$\max_{u_{Rif}} E(e) \quad \text{oppure} \quad \max_{u_{Rif}} E(e^2) \quad (1.9)$$

- Non linearità: è il discostamento della risposta da quella nominale. Un modo per quantificarla è quello di indicare il massimo scostamento della uscita nel campo di ingresso ( $\Delta y_N$  in figura 1.3)). Talvolta viene usato lo scarto quadratico medio tra le due curve, cioè con la notazione usata in (1.7)

$$S_{qm} = \frac{\sum_{j=1}^M (y_j - cu_j - b)^2}{M}. \quad (1.10)$$

La non linearità di un trasduttore ha molte ed importanti conseguenze negative<sup>1</sup> tra cui l’effetto degli ingressi periodici nella generazione sull’uscita di armoniche di frequenze superiori. Questo effetto è facilmente visibile se si considera un modello approssimante il comportamento del trasduttore come serie di potenze

$$y(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots \quad (1.11)$$

---

<sup>1</sup>Si ricordi che si considerano qui trasduttori nominalmente lineari; nel caso di trasduttori a caratteristica intrinsecamente non lineare si potranno sviluppare considerazioni analoghe rispetto alle deviazioni dal comportamento nominale.

Per un ingresso sinusoidale  $u(t) = A \cos(\omega t)$  a frequenza  $\omega/2\pi$  e ricordando che  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2}$ , l'uscita è calcolata semplicemente come

$$\begin{aligned} y(u) &= (a_0 + a_2 \frac{A^2}{2} + \dots) + (a_1 A + a_3 \frac{3A^3}{4} + \dots) \cos(\omega t) + \\ &\quad (a_2 \frac{A^2}{2} + \dots) \cos(2\omega t) + (a_3 \frac{A^3}{4} + \dots) \cos(3\omega t) + \dots \quad (1.12) \\ &= b_0 + b_1 \cos(\omega t) + b_2 \cos(2\omega t) + \dots \end{aligned}$$

L'effetto dei termini pari nello sviluppo in serie di potenze (cioè dei termini legati alla asimmetria della risposta per segnali di ingresso positivi e negativi) è quello di introdurre un offset  $b_0$  (oltre a quello già eventualmente presente) ed armoniche pari. Nel caso di armoniche pari con contenuto frequenziale diverso da zero per varie frequenze, le non linearità (quasi-statiche) possono quindi avere l'effetto di "aliasing" del segnale. Un fattore che ben rappresenta l'effetto di queste non linearità è "il fattore di distorsione armonica"  $D$

$$D = \sqrt{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{b_1}\right)^2 + \dots} \quad (1.13)$$

Si noti che la distorsione armonica introdotta da non linearità modellabili come serie di potenze non introduce distorsioni di fase (come evidente per il fatto che nello sviluppo in serie delle uscite non compaiono termini in  $\sin(\omega t)$ ).

Un accorgimento efficace per contrastare gli effetti delle non linearità di un trasduttore è quello di adoperare due trasduttori simili in configurazione differenziale: in questo caso il secondo trasduttore è usato in modo inverso rispetto al primo, in modo che la sua risposta può essere scritta come

$$y'(u) = a_0 - a_1 u + a_2 u^2 - a_3 u^3 + \dots, \quad (1.14)$$

operando successivamente la misura sulla differenza dei due segnali  $\tilde{y}(u) = y(u) - y'(u) = 2(a_1 u + a_3 u^3 + \dots)$ , eliminando (o attenuando fortemente se le caratteristiche dei due sensori non sono perfettamente uguali) l'offset e tutte le armoniche pari. In questo modo la sensibilità è migliorata (di un fattore 2), così come la distorsione armonica.

### 1.2.1 Il fenomeno di isteresi

Tra le caratteristiche dei trasduttori di misura che generano comportamenti nonlineari vi sono i fenomeni di *isteresi*, cioè comportamenti nonlineari dei sistemi con "memoria", in cui l'uscita dipende non solo dall'ingresso attuale, ma anche dalla sua storia. La risposta caratteristica di un tipico sensore con isteresi è riportata in figura 1.4.

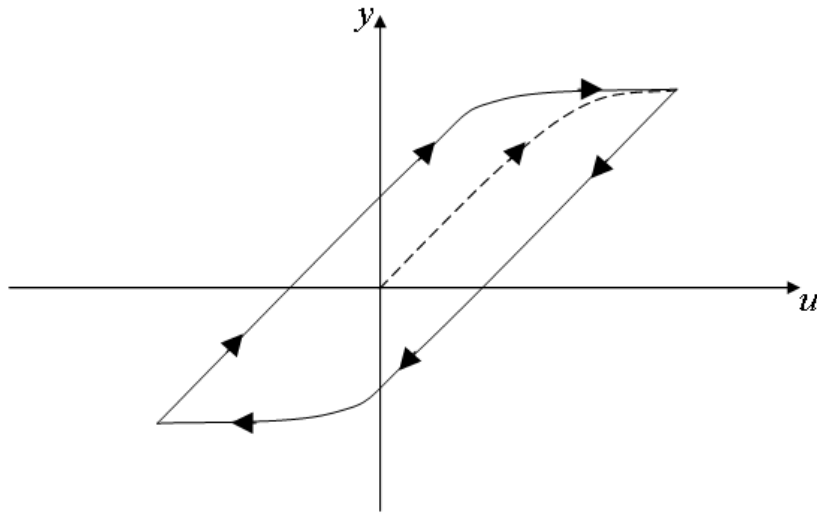


Figura 1.4: Risposta caratteristica di un trasduttore nonlineare con fenomeno di isteresi.

I fenomeni di isteresi sono causati spesso, nei sistemi elettromagnetici, da fenomeni di magnetizzazione (ciclo B-H dei materiali ferromagnetici), mentre nei sistemi meccanici tipici fenomeni isteretici sono la plastificazione dei materiali ed il gioco. Una caratteristica dei sensori con risposta isteretica è quella di introdurre, nella risposta a segnali periodici, una distorsione di fase che può sommarsi alla distorsione armonica vista in precedenza.

### 1.3 Effetto di carico e ritardo

Ulteriori importanti caratteristiche di un trasduttore di misura sono la sua impedenza di ingresso e quella di uscita, che determinano l'effetto di carico sul sistema su cui si vuole effettuare la misura, e l'effetto che i sistemi collegati sull'uscita del trasduttore possono avere sulle misure stesse. Come è naturale, l'impedenza di ingresso di un buon trasduttore deve essere alta (ad esempio, alto valore della resistenza di ingresso in un voltmetro in D.C., ovvero piccola massa per un accelerometro) mentre l'impedenza di uscita deve essere bassa, in modo che le variazioni di carico sulla uscita non influenzino sensibilmente la misura.

Nei trasduttori che necessitano di un trattamento del segnale non semplice, e in particolare di tipo digitale, una caratteristica rilevante è il ritardo

finito con cui il dato di misura viene reso disponibile rispetto all'istante in cui la misura è stata effettuata. Lo stesso tipo di problema si ha anche nella catena diretta tra controllore digitale e sistema controllato, dato che il controllo non può essere reso disponibile all'istante di campionamento del segnale. Il ritardo è quindi introdotto dai vari convertitori presenti (A/D e D/A), dal tempo di calcolo necessario, dalla dinamica dell'attuazione, da una eventuale elaborazione sensoriale o essere intrinseco nel problema da risolvere (si veda a tal proposito il classico esempio del laminatoio).

Non esistono in generale strumenti esatti per la valutazione degli effetti del ritardo, ma è necessaria una sua valutazione che, anche in sistemi ottenuti per discretizzazione di un sistema continuo, può essere fatta nel dominio della trasformata di Laplace. Si ricordi che la funzione di trasferimento di un ritardo finito  $T_0$  è data da  $e^{-sT_0}$ , ed il suo diagramma di Nyquist è un cerchio di raggio unitario centrato nell'origine. Il ritardo contribuisce un angolo di fase negativo che diminuisce il margine di fase del sistema in anello chiuso, fino a provocare l'instabilità del sistema.

Si consideri ad esempio il sistema di figura 1.5, che in assenza di ritardi nel trasduttore ( $S(s) = 1$ ) ha una f.d.t. (tipica per un asservimento meccanico di posizione) del tipo

$$\begin{aligned} K(s)P(s) &= \frac{K(s)}{s(1+\tau_m s)} \\ G_c(s) &= \frac{K(s)P(s)}{1+K(s)P(s)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

mentre quando il sistema di misura agisce con ritardo  $T_0$ , si ha:

$$\begin{aligned} K(s)P(s)S(s) &= \frac{K e^{-sT_0}}{s(1+\tau_m s)} \\ G_c(s) &= e^{sT_0} \frac{K(s)P(s)e^{-sT_0}}{1+K(s)P(s)e^{-sT_0}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

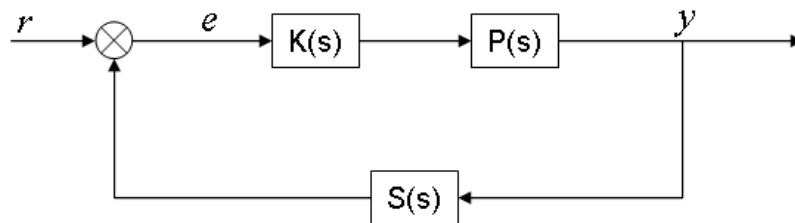


Figura 1.5: Generico sistema di controllo in retroazione.

I diagrammi di Nyquist relativi ai due casi sono contrassegnati con “A” e “B” in figura 1.6

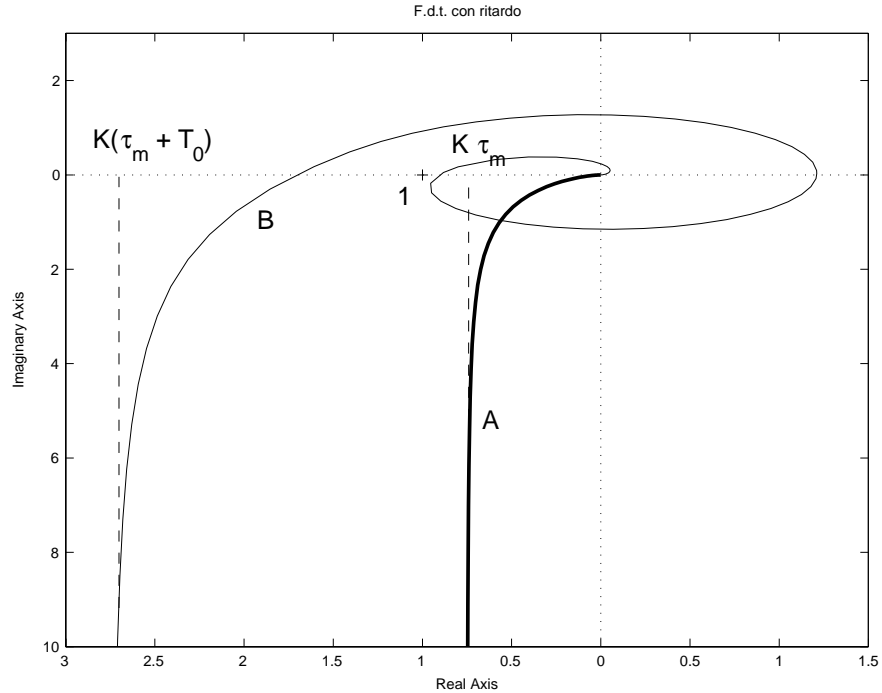


Figura 1.6: Diagrammi di Nyquist relativi al sistema in 1.15 “A” ed in 1.16 “B”.

Nel diagramma “B” si può notare come il contributo di sfasamento dovuto al ritardo cresce linearmente con la pulsazione  $\omega$ , dando luogo al tipico avvolgimento a spirale del luogo di Nyquist. Nell’esempio di figura, le costanti scelte per il disegno sono tali per cui la introduzione del ritardo provoca la instabilità del sistema.

### 1.3.1 Le approssimanti di Padé

Per lo studio dei sistemi con ritardi finiti è spesso necessario ricorrere ad approssimazioni razionali della funzione  $e^{-sT_0}$ . Se si vuole ad esempio calcolare la risposta al gradino di un sistema con ritardo finito  $T_0$ , conviene esprimere il ritardo con una funzione razionale che lo approssimi e procedere con le tecniche usuali di trasformazione ed antitrasformazione di Laplace (per le quali si utilizzano degli sviluppi in fratti semplici). La stessa necessità si incontra qualora si vogliano utilizzare strumenti informatici di simulazione, come l’ausilio di Matlab: la rappresentazione all’interno del calcolatore del ritardo finito necessiterebbe un rapporto dato da una serie infinita di termini.

Data una funzione  $f(s)$  e dati due polinomi  $P(s)$  e  $Q(s)$  di gradi generici rispettivamente  $p$  e  $q$ , la funzione razionale  $P(s)/Q(s)$  (sviluppabile in serie di potenze) è un *approssimante di Padé* della funzione  $f(s)$  se la serie di potenze di  $s$  ottenuta dividendo i polinomi ha i primi  $p+q+1$  termini uguali a quelli dello sviluppo in serie di Maclaurin di  $f(s)$ .

Sapendo che la funzione esponenziale ha lo sviluppo di Maclaurin

$$f(s) = e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!} + \dots \quad (1.17)$$

e ponendo

$$\begin{aligned} P(s) &= b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_0 \\ Q(s) &= a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

i coefficienti delle approssimanti di Padé sono legati ai gradi relativi dei due polinomi  $p$  e  $q$  dalle relazioni

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{(p+q-k)!p!}{(p+q)!k!(p-k)!} (-1)^k \quad k = 0, \dots, p \\ a_k &= \frac{(p+q-k)!q!}{(p+q)!k!(q-k)!} \quad k = 0, \dots, q \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le approssimanti di Padé si possono dunque utilizzare per approssimare i ritardi finiti, avendo la cura di sostituire  $T_0 s$  con  $s$  in (1.18), ottenendo

$$G(s, T_0) = \frac{\sum_{k=0}^p \frac{(p+q-k)!p!}{(p+q)!k!(p-k)!} (-1)^k T_0^k s^k}{\sum_{k=0}^q \frac{(p+q-k)!q!}{(p+q)!k!(q-k)!} T_0^k s^k} \quad (1.20)$$

A tal proposito sono rappresentati in figura 1.7 due diagrammi di nyquist corrispondenti a due ritardi finiti  $T_0$ .

La figura è ottenuta approssimando il ritardo finito con  $p = q = 3$

$$G(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3} \quad (1.21)$$

e per due valori diversi del ritardo: nella figura di sinistra il ritardo  $T_0 = 0.2sec$ , mentre a destra  $T_0 = 2sec$ . Nel primo caso l'approssimazione è buona, dovendo il digramma di Nyquist del ritardo approssimare un cerchio di raggio unitario. All'aumentare del ritardo tale approssimazione peggiora ed è quindi necessario aumentare il grado dei polinomi approssimanti.

Nelle approssimazioni del ritardo finito di solito si assume  $p = q$  perché in tal caso l'approssimante è sicuramente stabile, mentre nel caso in cui  $p \neq q$  si può generare instabilità. Le approssimanti di Padé devono essere scelte anche in base ai sistemi che sono presenti in cascata, infatti sistemi dotati di una funzione di trasferimento filtrante possono migliorare l'approssimazione,

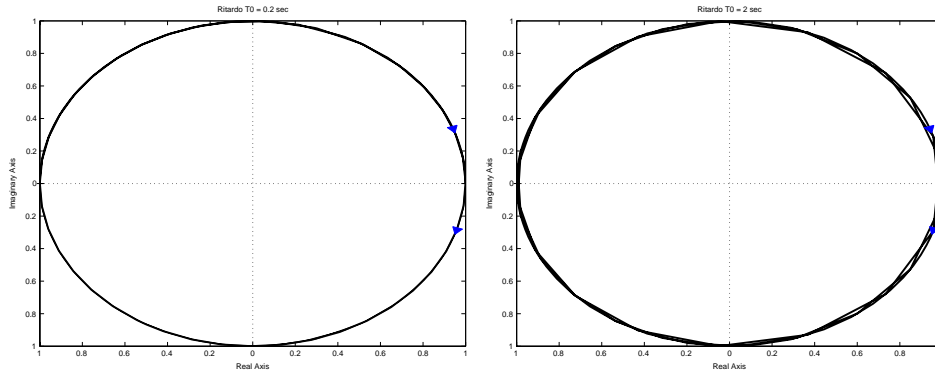


Figura 1.7: Diagrammi di Nyquist relativi al ritardo finito di valore pari a  $T_0 = 0.2\text{sec}$  (sinistra) e  $T_0 = 2\text{sec}$  (destra), ottenuti utilizzando le approssimanti di Padé.

ad esempio quando se ne studi il comportamento in risposta ai segnali tipici, eliminando eventuali oscillazioni indesiderate. In questo caso, è possibile al limite scegliere delle approssimanti con  $p > q$ , che porterebbe altrimenti a sistemi lineari non causali.

**Osservazione 1.1.** *Per quanto riguarda lo strumento Simulink, è possibile rappresentare il ritardo direttamente con il blocchetto Transport Delay, all'interno del quale è possibile inserire l'approssimazione lineare di Padé, specificandone l'ordine.*

**Osservazione 1.2.** *È interessante notare come l'ordine dell'approssimante influisca sul relativo diagramma di Nyquist. Approssimando al primo ordine, il diagramma di Nyquist che si ottiene è una semicirconferenza di raggio unitario appartenente al semipiano con parte immaginaria negativa (figura 1.8 a sinistra), comportamento dettato dalla particolare posizione del polo e dello zero (figura 1.8 a destra).*

*Approssimando al secondo ordine, il diagramma di Nyquist è una circonferenza di raggio unitario (figura 1.9 a sinistra) percorsa una sola volta per  $\omega$  crescenti. Tale comportamento si ricerca nella posizione dei due poli e dei due zeri (figura 1.9 a destra) complessi e coniugati.*

*Al terzo ordine si avrà ancora una circonferenza, ma stavolta percorsa una volta e mezzo, e così via.*



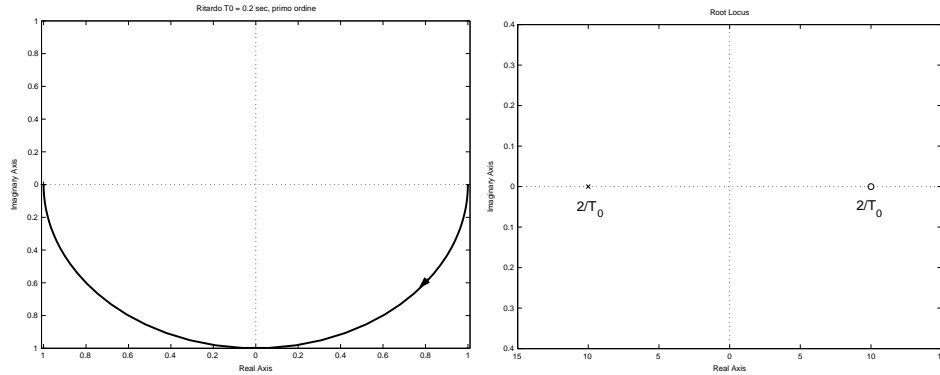


Figura 1.8: Diagramma di Nyquist relativo all'approssimante di Padé del ritardo finito di ordine 1 (sinistra) e relativo luogo delle radici (destra).

## 1.4 Selettività dei trasduttori

Una caratteristica di fondamentale importanza per sistemi di misura che operano su sistemi a più variabili è la selettività della risposta. Con questo termine si intende il rapporto tra la sensibilità del trasduttore alle variazioni del parametro per la cui misura è progettato, e quelle delle altre variabili del sistema. Un caso tipico di effetto di perturbazione delle misure da parte di variabili “esterne” è quello causato dalle variazioni di temperatura su misure di resistenza. Quando il trasduttore o il sistema in se' non permettono di avere sufficiente selettività, è spesso opportuno ricorrere a sistemi sensoriali multivariabili, in cui si combinano misure delle (combinazioni di) diverse variabili per ottenere l'informazione desiderata.

Nel caso ad esempio della misura della deformazione di un materiale mediante estensimetri (elementi che trasducono le deformazioni cui sono sottoposti in variazioni di resistenza, di cui si parlerà più avanti) in un ambiente a temperatura variabile (le variazioni di temperatura come è noto modificano la resistenza dei conduttori che formano gli estensimetri), il sistema può essere schematizzato come in figura 1.10, dove le risposte del trasduttore  $y_1$  all'ingresso  $u_1$  e all'ingresso  $u_2$  sono riportate nella prima riga della matrice delle risposte.

Si noti che, adottando l'approssimazione lineare delle risposte dei trasduttori e denominando  $c_{ij}$  la sensibilità della misura  $y_i$  all'ingresso  $u_j$ , il modello del sistema può esser scritto sinteticamente in forma matriciale come

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = C\underline{u} \quad (1.22)$$

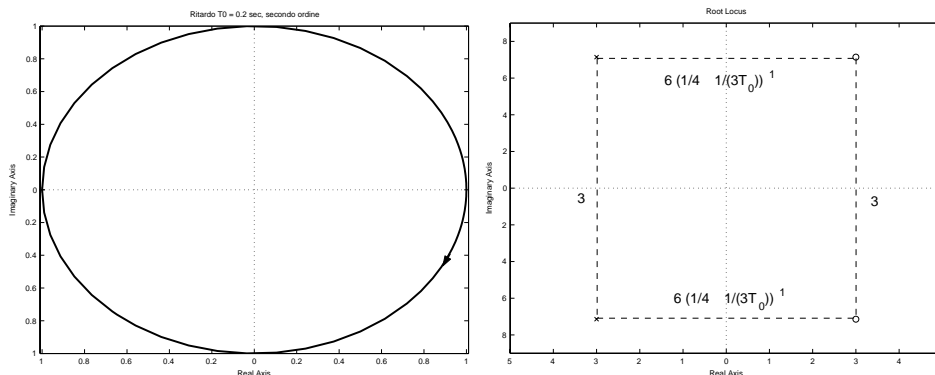


Figura 1.9: Diagramma di Nyquist relativo all'approssimante di Padé del ritardo finito di ordine 2 (sinistra) e relativo luogo delle radici (destra).

Mentre la selettività della misura  $y_1$  è data da  $\max_i \frac{\sum_{j \neq i} |c_{ij}|}{c_{ii}}$ , se si guarda al sistema di trasduzione multivariabile nel suo complesso, è possibile definire nuove uscite  $\hat{y}_1, \hat{y}_2$  ottenute per rielaborazione delle misure usando la inversa della matrice di sensibilità

$$\underline{\hat{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = C^{-1} \underline{y} \quad (1.23)$$

La selettività (nominale) di queste nuove misure è così infinita, valendo la relazione

$$\underline{\hat{y}} = C^{-1} C \underline{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} = \underline{u} \quad (1.24)$$

D'altronde, nel caso reale, la matrice  $C^{-1}$  sarà ottenuta in base al modello del sensore o ad una sua calibrazione sperimentale, e la sua corrispondenza con la reale risposta dalla sensibilità del sistema non sarà perfetta. Tornando alla rappresentazione di figura 1.10, si avrà una situazione del genere riportato in figura 1.11, dove la selettività delle misure è notevolmente migliorata.

La approssimazione lineare del nuovo comportamento sarà del tipo:

$$\underline{\hat{y}} = \begin{bmatrix} 1 + x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & 1 + x_{22} \end{bmatrix} \underline{u} \quad (1.25)$$

dove tipicamente  $|x_{ij}| \ll 1$ . La matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

è detta di "CROSSTALK".

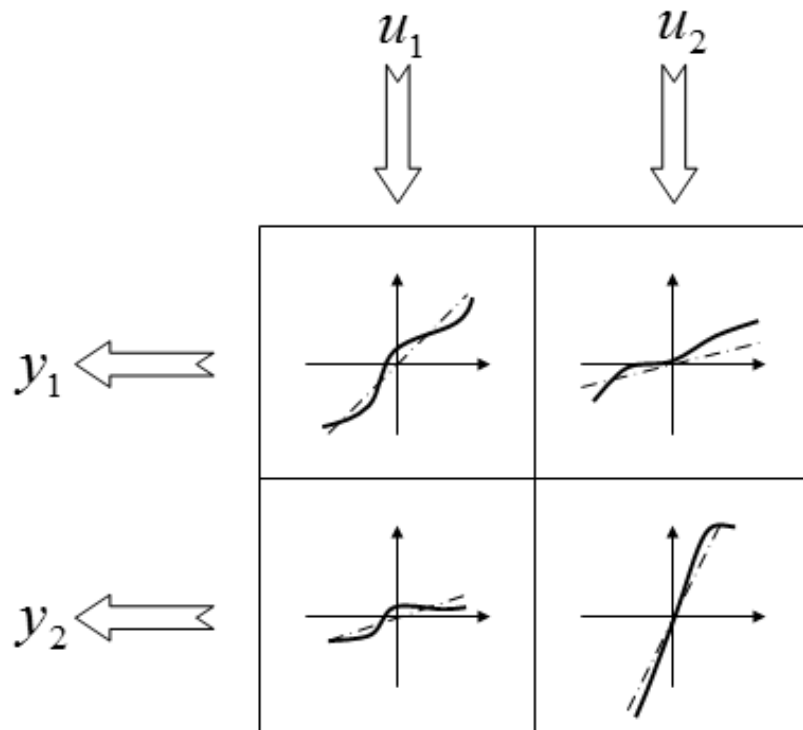


Figura 1.10: Esempio di trasduttore multivariabile adottato per migliorarne la selettività.

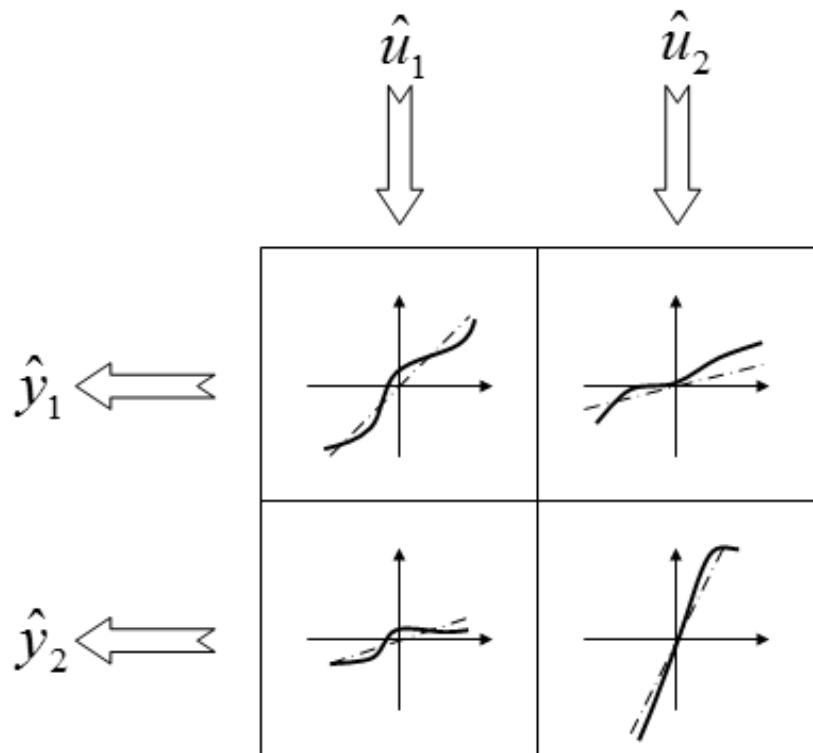


Figura 1.11: Trasduttore multivariabile con selettività migliorata.

# Capitolo 2

## Sistemi non lineari in retroazione

### 2.1 Introduzione

In questo capitolo verranno analizzati gli effetti dei trasduttori non lineari una volta che essi vengano inseriti in un sistema di controllo in retroazione, identificandone i comportamenti tipici ed alcuni metodi atti allo studio delle caratteristiche peculiari.

In particolare si studieranno sistemi non lineari di particolare importanza, schematizzabili come in figura 2.1.

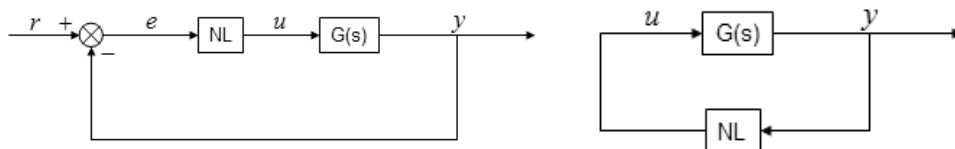


Figura 2.1: Esempi di sistemi non-lineari di particolare importanza.

Si supponga di linearizzare la caratteristica del blocco non-lineare situato nel sistema di figura 2.1 (sinistra), cioè si approssimi la curva di risposta del trasduttore con la tangente nel punto  $(\tilde{e}, \tilde{u})$ , dove  $\tilde{e} = \tilde{r} - \tilde{y}$ . In questo modo si definisce un guadagno statico locale del blocco non lineare, dipendente in generale dal particolare valore del riferimento esterno  $\tilde{r}$ . La linearizzazione è accettabile per piccole perturbazioni del punto di equilibrio ed inoltre il comportamento del sistema linearizzato, i suoi poli, la stabilità, dipendono dal particolare punto di equilibrio scelto. Tale comportamento non stupisce,

poiché è ben noto dalla teoria sulla stabilità dei sistemi che per i sistemi non lineari è possibile parlare soltanto di stabilità puntuale, ovvero di una regione, mentre si può parlare sempre di globale asintotica stabilità per un sistema lineare.

Per i sistemi affetti da non linearità la stabilità è inoltre dipendente dalla particolare entità della perturbazione, oltre che dal particolare punto di equilibrio scelto.

Nel caso di dispositivi di controllo si richiede che qualsiasi punto di equilibrio nel quale il sistema si può portare a seguito di perturbazioni o riferimenti imposti all'ingresso sia asintoticamente stabile, indipendentemente dall'entità di tali perturbazioni. La caratteristica cercata è quindi la *globale asintotica stabilità*.

Lo studio di un particolare punto di equilibrio può essere affrontato con lo schema riportato in figura 2.1 (destra), trasladando tutto il sistema nel punto di equilibrio prescelto e studiandone le variazioni rispetto a detto punto. In tal caso la variazione del riferimento esterno può essere considerata nulla. Lo studio di un generico sistema non lineare in retroazione con un riferimento  $r$  lentamente variabile si può quindi ricondurre allo studio di una famiglia di sistemi autonomi alle variazioni (e.g. un sistema per ogni punto di equilibrio di interesse).

Per affrontare lo studio della stabilità da un punto di vista diretto conviene utilizzare criteri che garantiscano il comportamento che normalmente si richiede ai sistemi di controllo, cioè la stabilità asintotica per qualsiasi tipo di perturbazione: la globale asintotica stabilità. Nello studio che segue si farà riferimento esplicito a sistemi posti nella forma dello schema di destra in figura 2.1, dato che in tali condizioni ci si può ricondurre ogni volta che il riferimento può essere considerato costante, ovvero lentamente variabile.

## 2.2 Il criterio del cerchio

Si consideri un sistema con un solo ingresso ed una sola uscita con retroazione unitaria, rappresentato in figura 2.1 (si ricorda che ai fini dello studio della stabilità, con  $r = 0$ , gli schemi di figura si equivalgono). Il blocco indicato con  $NL$  rappresenta la non linearità monodimensionale, caratterizzata da una relazione algebrica non lineare tra il proprio ingresso  $e$  e l'uscita  $u$ :  $u(t) = NL(e, t)$ , mentre il blocco  $G$  rappresenta la parte lineare descritta dalla propria funzione di trasferimento. Supponiamo che le non linearità soddisfino una condizione di settore

$$a < \frac{NL(e, t)}{e} < b \quad (2.1)$$

rappresentate in figura 2.2.

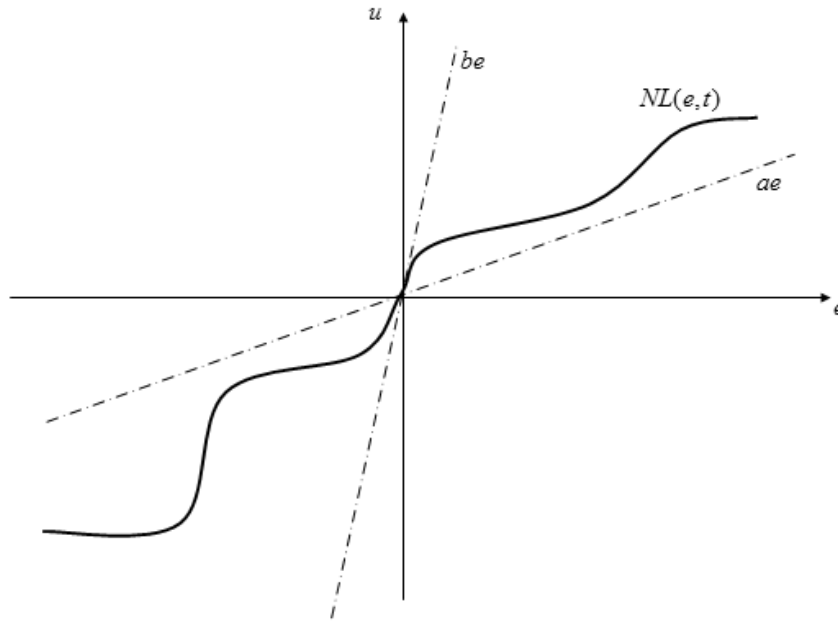


Figura 2.2: Non-linearità soddisfacente un vincolo di settore.

**Proposizione 2.1.** *Il sistema di figura 2.1 è assolutamente stabile con riferimento al settore  $(a, b)$  se è asintoticamente stabile quale che sia la non linearità che soddisfa la condizione di settore (2.1).*

Si faccia l'ipotesi di essere nel caso lineare  $NL(e, t) = Ke$ , e si consideri il diagramma di Nyquist di una generica  $G(j\omega)$  riportato in figura 2.3.

I diagrammi polari consentono di studiare l'influenza, sulla stabilità del sistema, della variazione della costante  $K$  della funzione di guadagno di anello. Posto  $K = \gamma K_0$ , la variazione del diagramma polare al variare di  $\gamma$  corrisponde ad uno scalamento, dello stesso rapporto, delle lunghezze dei vari segmenti che congiungono ciascun punto del diagramma con l'origine. Se si è interessati alla sola verifica di stabilità a ciclo chiuso del sistema mediante il Criterio di Nyquist, non è necessario ridisegnare volta per volta il diagramma, ma è sufficiente tracciare il diagramma polare corrispondente al valore di  $K_0$  e, anziché un unico punto "fisso"  $-1$ , considerare un punto critico "variabile"  $-1/\gamma$ , come indicato in figura 2.3.

Si supponga di imporre  $K_0 = 1$  e  $\gamma \in [0, +\infty]$ . In tal caso la non linearità è data dall'incertezza sulla conoscenza dell'effettivo guadagno  $K \in [a, b]$ . Al

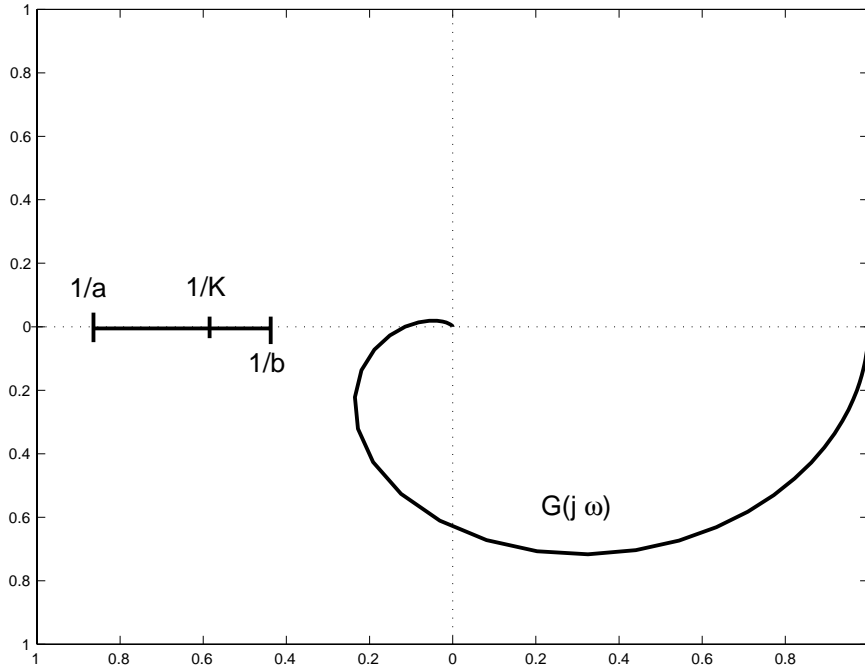


Figura 2.3: Digramma di Nyquist di un generico sistema al variare della costante  $K$  della funzione di guadagno di anello.

variare di  $K$  sembrerebbe di poter applicare il Criterio di Nyquist evitando le intersezioni con il segmento reale  $[-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}]$  ed eventualmente circondarlo in senso antiorario per ogni polo instabile a ciclo a perta di  $G(j\omega)$ . Quanto asserito non è propriamente vero, data l'esistenza di controesempi che vanificano tale ipotesi.

Note le costanti  $a$  e  $b$  è però possibile costruire il *cerchio critico*, con diametro  $(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b})$  (si veda a tal proposito la figura 2.4), ed utilizzare il seguente **Criterio del cerchio**

**Proposizione 2.2.** *Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema  $G(s)$  abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente affinché il sistema in retroazione sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione  $G(j\omega)$  non circonda né tocchi il cerchio critico.*

**Osservazione 2.1.** *Si noti che il criterio del cerchio si riconduce, almeno per ciò che riguarda la sufficienza della condizione, al criterio di Nyquist qualora*



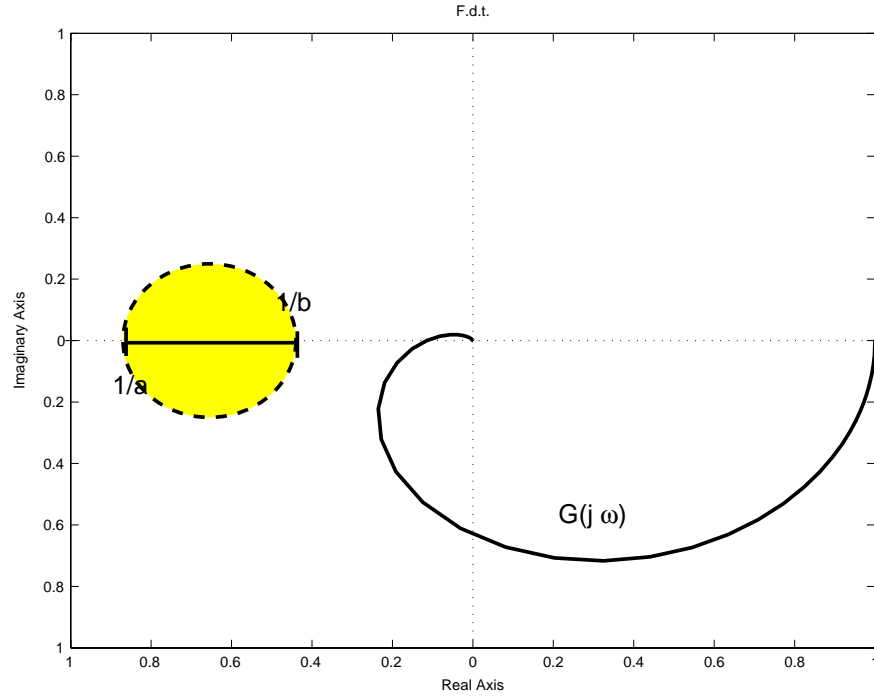


Figura 2.4: Digramma di Nyquist di un generico sistema con l'annesso cerchio critico.

si consideri un elemento puramente algebrico e lineare, cioè con  $a = b = \gamma$ , ed il cerchio si riduce al punto di scissa reale  $-1/\gamma$ .

Si prendano adesso in considerazione alcuni esempi di non linearità tipiche.

- Si consideri il caso in cui si abbia  $a = 0$  e  $0 < b < +\infty$ . Il legame algebrico della non linearità si modifica come mostrato nella parte sinistra della figura 2.5. Il cerchio critico si modifica di conseguenza trasformandosi nel semipiano a sinistra del punto  $-1/b$ . Segue allora che la condizione sufficiente è che la  $G(j\omega)$  sia stabile in anello aperto (parte destra della figura 2.5).
- Nel caso in cui si abbia  $0 > a > -\infty$  e  $0 < b < +\infty$ , la non linearità si modifica come mostrato nella parte sinistra della figura 2.6. Il cerchio critico si modifica di conseguenza trasformandosi nella parte esterna al cerchio di diametro  $(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b})$ . Segue allora che la condizione sufficiente per il criterio del cerchio è  $G(j\omega)$  stabile in anello aperto e completamente contenuta all'interno del cerchio (parte destra della figura 2.6).

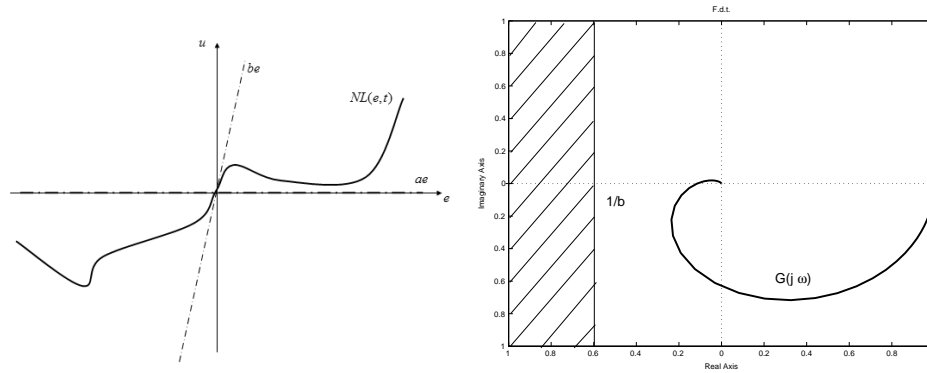


Figura 2.5: Criterio del cerchio e non linearità nel caso di  $a = 0$ .

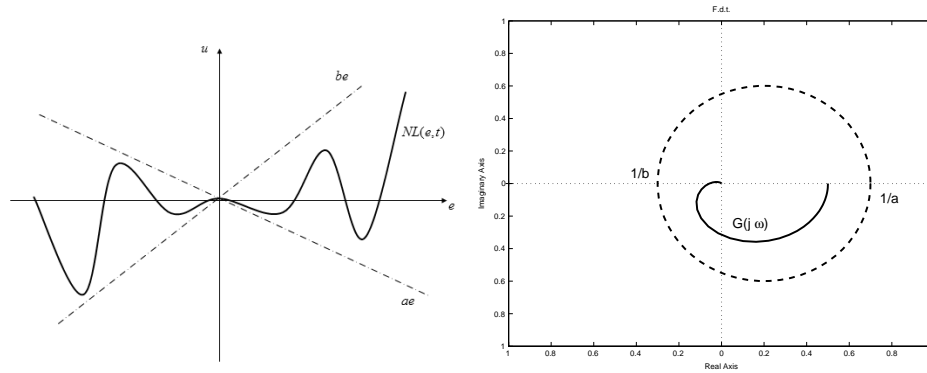


Figura 2.6: Criterio del cerchio e non linearità nel caso di  $0 > a > -\text{inf}$  e  $0 < b < +\text{inf}$ .

- Nel caso in cui si abbia  $a$  e  $b$  finiti ed entrambi negativi, si torna nel primo caso preso in esame, avendo l'accortezza di tracciare i diagrammi di  $-G(j\omega)$  (figura 2.7).

## 2.3 Il criterio di Popov

Anche il **Criterio di Popov** rappresenta una condizione sufficiente ma non necessaria per la stabilità globale. Si consideri  $NL(e,t) \in (0, b)$  (si veda l'esempio riportato in figura 2.2).

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento della parte lineare, si considerano due casi: nel primo la  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa;

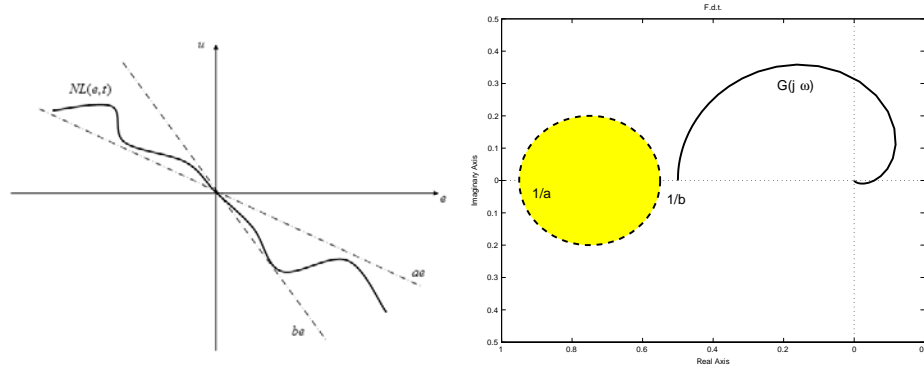


Figura 2.7: Criterio del cerchio e non linearità nel caso di  $a$  e  $b$  entrambi negativi.

nel secondo caso ha ancora tutti i poli a parte reale negativa, tranne al più un polo semplice nell'origine.

**Proposizione 2.3.** *Si consideri una  $G(s)$  asintoticamente stabile a ciclo aperto, e ci si riferisca allo schema fondamentale riportato in figura 2.1 (destra). Il sistema complessivo è assolutamente stabile con riferimento al settore  $(0, b)$  qualora esista un numero reale  $q$  tale che, per tutti i valori di  $\omega \geq 0$  e per un  $\delta > 0$  arbitrariamente piccolo, si abbia*

$$\operatorname{Re} \{(1 + jq\omega)G(j\omega)\} + \frac{1}{b} \geq \delta > 0 \quad (2.2)$$

(condizione solamente sufficiente).

Nel caso in cui la  $G(s)$  abbia un polo nell'origine, si deve aggiungere l'ulteriore condizione che la costante di guadagno sia positiva, cioè

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) > 0 \quad (2.3)$$

**Osservazione 2.2.** *Il parametro  $q$  presente nell'enunciato del Criterio di Popov dipende dalla classe di non linearità a cui si fa riferimento e dal valore limite  $b$ .*

**Osservazione 2.3.** *Si osservi che il Criterio di Popov rimane valido anche nel caso in cui nella funzione di trasferimento della parte lineare  $G(s)$  siano presenti dei ritardi finiti  $e^{-sT}$ .*

La condizione (2.2) è interpretabile graficamente una volta che si divida la funzione di trasferimento lineare nella sua parte reale e immaginaria

rispettivamente,  $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ , in modo da riscrivere la condizione (2.2)

$$R(\omega) - q\omega I(\omega) > -\frac{1}{b} \quad (2.4)$$

valida  $\forall \omega \geq 0$ . In altri termini, il diagramma della risposta armonica, tracciato sul piano di Nyquist, deve giacere alla destra della linea retta che taglia l'asse delle ascisse nel punto  $-1/b$  e l'asse delle ordinate in  $1/(bq\omega)$ . Se si esclude il caso in cui  $q = 0$ , a cui corrisponde una retta verticale passante per il punto  $-1/b$  sull'asse reale, in tutti gli altri casi le rette hanno una pendenza dipendente dal particolare valore di  $\omega$ .

Il Criterio di Popov implica quindi il tracciamento sul diagramma di Nyquist, di una curva funzione di  $\omega$ . Questa difficoltà può essere eliminata facendo ricorso ad un grafico della risposta armonica modificato, talvolta detto *Diagramma di Popov*. Si definisca la funzione di Popov

$$G_p(j\omega) = R(\omega) + j\omega I(\omega) = R_p(\omega) + jI_p(\omega) \quad (2.5)$$

dalla quale si può ottenere la condizione di Popov (2.2) modificata

$$R_p(\omega) - qI_p(\omega) > -\frac{1}{b} \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) definisce una retta passante per il punto  $(-1/b, 0)$  con una pendenza pari a  $1/q$ . Entrambe le equazioni (2.2) e (2.6) definiscono le rette di Popov.

**Osservazione 2.4.** *Si osservi che nel caso in cui si utilizzi la più semplice (2.6), la condizione (2.3) corrisponde a richiedere che il grafico di  $G_p(\omega)$  per  $\omega = 0$  sia rappresentato da un punto a parte immaginaria negativa, ossia che il diagramma di  $G_p(\omega)$  parta dal semipiano al di sotto dell'asse reale.*

In figura 2.8 è rappresentato un esempio dell'applicazione del Criterio di Popov, nel quale è stato tracciato il digramma di Popov ed una retta corrispondente ad una non linearità.

Calcolando esplicitamente la  $G_p(\omega)$ , nel caso in cui si ottenga un grafico convesso (il che avviene nella maggior parte dei casi di interesse pratico) la retta limite, ovvero il valore della massima non linearità utilizzabile, sarà tangente al luogo nel punto in cui il diagramma di Popov taglia l'asse reale. In questo modo, il valore limite  $\bar{b}$  può essere calcolato con Routh.

Si considerino adesso una serie di non linearità tipiche alle quali è possibile applicare il Criterio di Popov. Come visto in precedenza, il criterio si applica a non linearità di settore  $(0, b)$ , con  $b < +\infty$  e ad un sol valore (quindi senza memoria od isteresi):

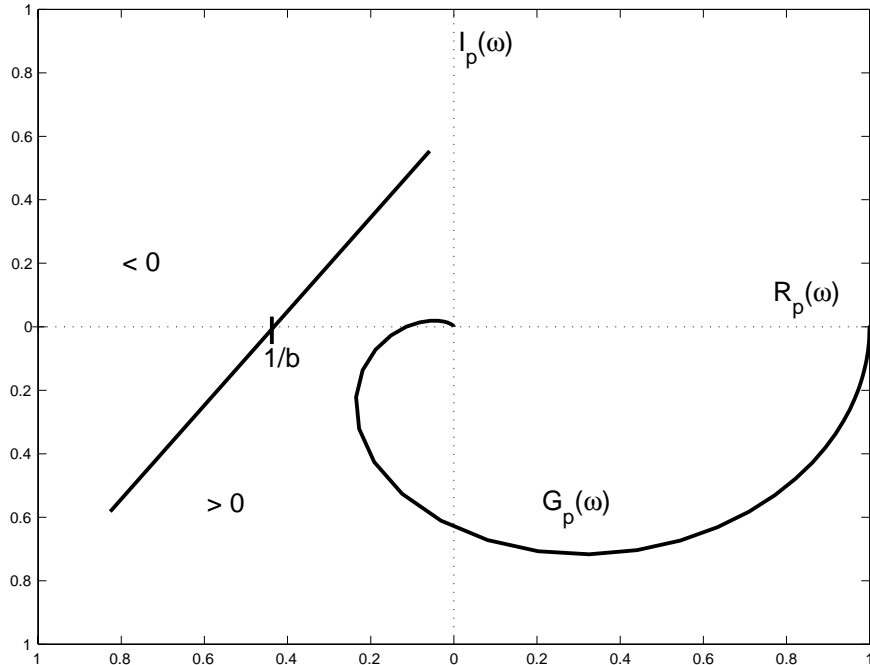


Figura 2.8: Criterio di Popov. Nel grafico sono evidenziate le zone in cui il criterio è soddisfatto.

- Non linearità tipica senza memoria (figura 2.9). In questo caso non è possibile stabilire dei limiti a priori sul valore di  $q$ , dipendente solamente dalla sagomatura della  $G_p(\omega)$ .
- Non linearità senza memoria (figura 2.10), tipica dei sistemi a relé, con due soli valori. In questo caso il settore della non linearità è  $(0, +\infty)$ , per cui è possibile stabilire che  $q \geq 0$ .

Da questo esempio si nota anche come il criterio del cerchio sia una condizione solamente sufficiente. Infatti per funzioni di trasferimento con eccesso poli - zeri pari a due ed a fase minima, il criterio del cerchio non è mai verificato per  $b \rightarrow +\infty$ .

- Isteresi passiva (figura 2.11). Il settore della non linearità sarà ancora  $(0, b)$  con  $b < +\infty$ . Il parametro  $q \leq 0$ .
- Isteresi attiva (figura 2.12). Questo caso è identico alla isteresi passiva, solo con  $q \geq 0$ .
- Non linearità generica, tempo variante (figura 2.13). In questo caso si

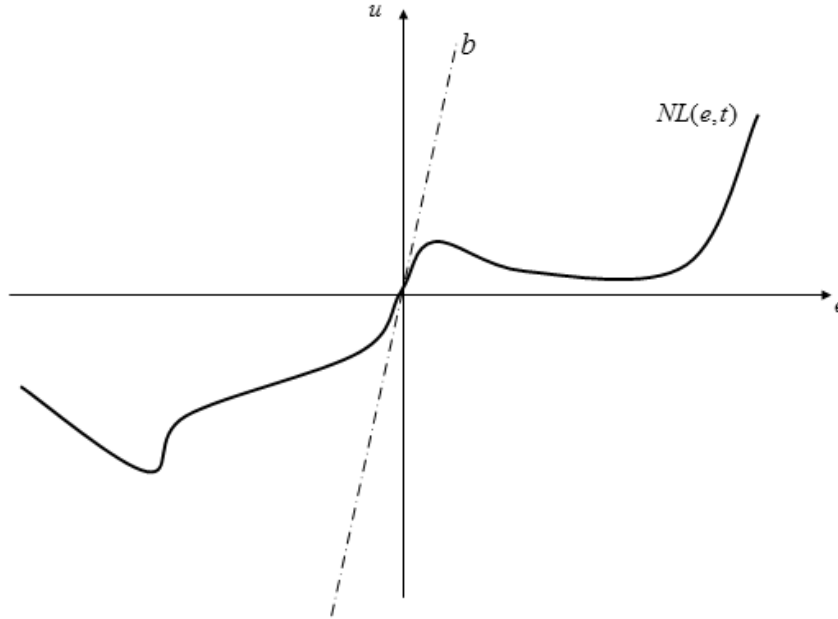


Figura 2.9: Tipica non linearità senza memoria.

ha  $NL(e, t)$ . Data la generalità del caso, si ha  $q = 0$ , cioè si torna al criterio del cerchio.

### 2.3.1 Esempio numerico

Come primo esempio, si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 7s + 10} \quad (2.7)$$

con  $NL(e, t) \in [0, b]$ .

Si noti che la funzione di trasferimento è strettamente stabile in anello aperto. Si calcoli adesso la funzione di trasferimento di Popov  $G_p(j\omega) = R_p(j\omega) + jI_p(j\omega)$

$$\begin{aligned} R_p(j\omega) &= \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{4\omega^2 + 30}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100} \\ I_p(j\omega) &= \omega \operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{\omega^2(\omega^2 + 11)}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sostituendo nella equazione di Popov (2.2)

$$4\omega^2 + 30 + q\omega^2(\omega^2 + 11) + \frac{1}{b}(\omega^4 + 29\omega^2 + 100) \geq \delta > 0 \quad (2.9)$$

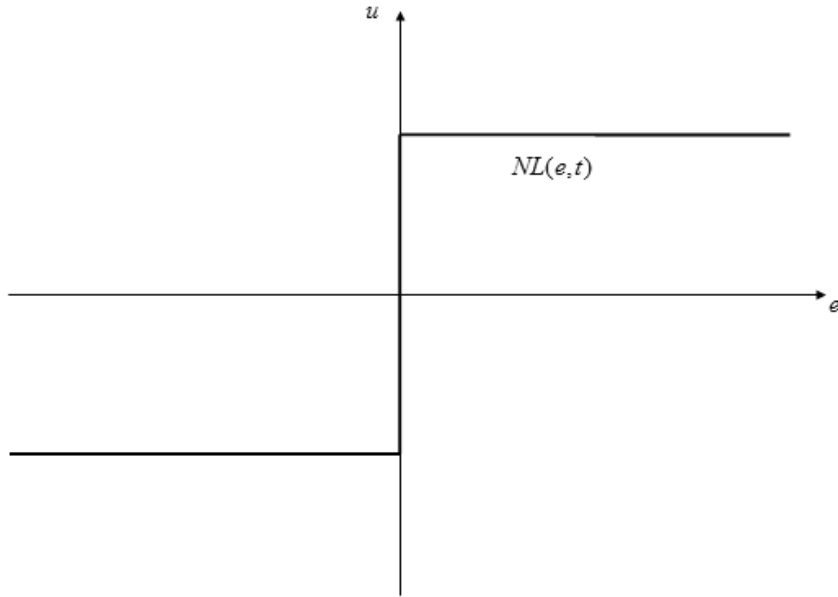


Figura 2.10: Tipica non linearità a relé.

verificata  $\forall q$  e  $\forall b \in [0, +\infty]$ . Allora il sistema sarà assolutamente stabile in  $[0, +\infty]$ .

La funzione di trasferimento  $G(s)$  scelta per questo esempio ha un eccesso poli-zeri pari ad uno ed ha fase minima, quindi per  $\omega \rightarrow +\infty$  il digramma di Nyquist arriverà con fase  $-\pi/2$  e sarà interamente contenuto nel semipiano reale positivo. La non linearità considerata in questo esempio è compresa nel settore  $[0, +\infty]$ , quindi, dal criterio del cerchio (per  $q = 0$ ) la zona proibita sarà tutto il semipiano a parte reale negativa. Da questo semplice ragionamento segue che il sistema sarà assolutamente stabile indipendentemente dal valore di  $q$  e per ogni  $b$ .

## 2.4 Criterio generalizzato del cerchio

Il criterio del cerchio, descritto nel paragrafo 2.2, rappresenta una forma semplificata ma di uso relativamente esteso, ma corrisponde ad una condizione sufficiente molto più restrittiva del criterio di Popov. La caratteristica principale che rende appetibile tale criterio è la sua diretta applicazione ai diagrammi di Nyquist, e non a quelli modificati di Popov.

Nella sua versione più estesa, il criterio del cerchio comprende quello di Popov come caso particolare (in cui il settore sia delimitato da  $a = 0$ ).

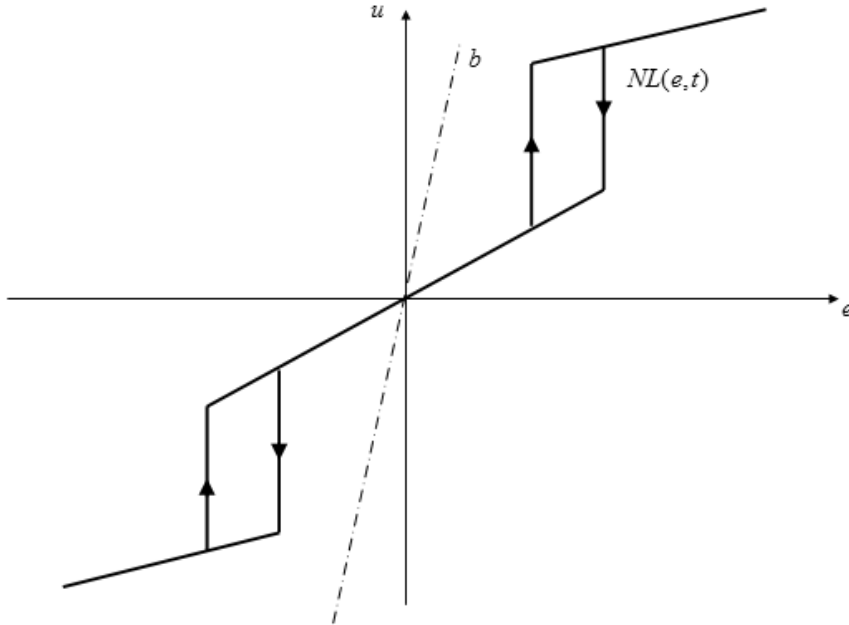


Figura 2.11: Tipica non linearità ad isteresi passiva.

Tale generalizzazione si paga con una difficile applicazione pratica, in quanto l'analisi deve essere condotta per tentativi su una famiglia di cerchi. Illustrare l'enunciato di questo criterio ci permette di comprendere meglio come l'uso dei diagrammi di Popov, in luogo di quelli della risposta armonica, sia solo una congettura, un espediente per rendere pratica l'applicazione del criterio del cerchio generalizzato, eliminando la procedura per tentativi.

**Proposizione 2.4.** *Data una funzione di trasferimento lineare  $G(s)$  con tutti i poli a parte reale negativa, ad eccezione di un polo semplice o doppio nell'origine, condizione sufficiente per la stabilità asintotica è che esista un numero reale  $q$  tale che il diagramma polare completo  $G(j\omega)$  non circonda il punto critico e che  $\forall \omega > 0$  il punto  $G(j\omega)$  sia esterno al cerchio con centro nel punto*

$$C(q, \omega) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + jq\omega \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (2.10)$$

*ed intersecante l'asse reale nei punti  $-1/a$  e  $-1/b$ .*

Si noti che la famiglia di cerchi definita dalla (2.10) ha i centri tutti giacenti sulla stessa retta verticale passante per il punto di mezzo del segmento  $(-1/a, -1/b)$  (condizione generata dalla necessità di intersecare l'asse



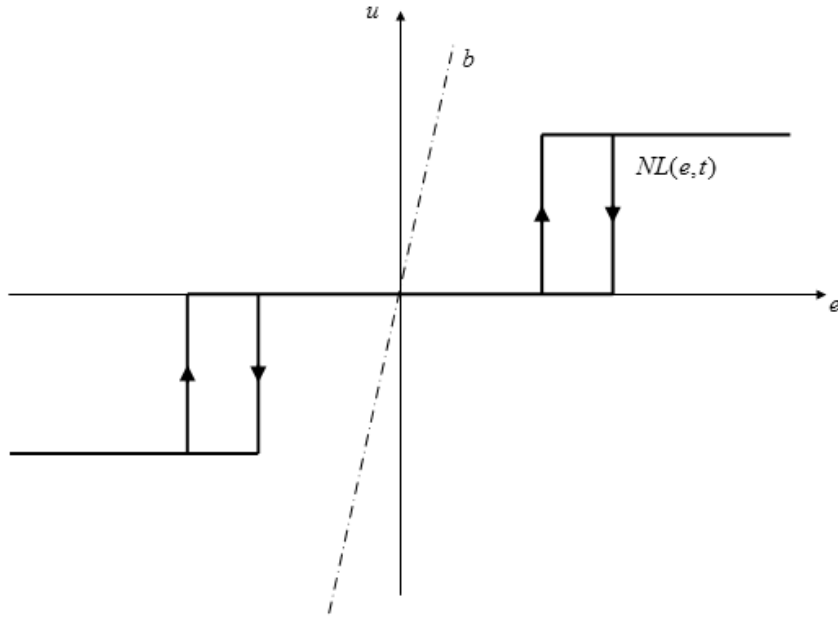


Figura 2.12: Tipica non linearità ad isteresi attiva.

reale nei punti medesimi), di altezza variabile linearmente con  $\omega$ , secondo un coefficiente di proporzionalità  $q$ . Il criterio del cerchio come presentato in precedenza altro non è che questo criterio, generalizzato con  $q = 0$ .

Si supponga adesso di porre  $a = 0$ : la famiglia di cerchi degenera in una stella di rette con centro nel punto  $-1/b$  e con pendenza  $1/(q\omega)$  (Criterio di Popov).

Nella figura 2.14 è rappresentato un esempio del criterio del cerchio generalizzato, nel quale si nota anche la presenza della retta generata dal corrispondente Criterio di Popov.

## 2.5 Spostamento delle singolarità

Per completezza vengono affrontati in questo paragrafo due tecniche per la modifica, entro certi limiti, della non linearità presa in esame.

### 2.5.1 Spostamento dei poli

Si consideri lo schema *a*) di figura 2.15 e si supponga che il sistema sia affetto da una non linearità di settore (figura 2.2) con  $NL(e) \in [a, b]$  e tempo invari-

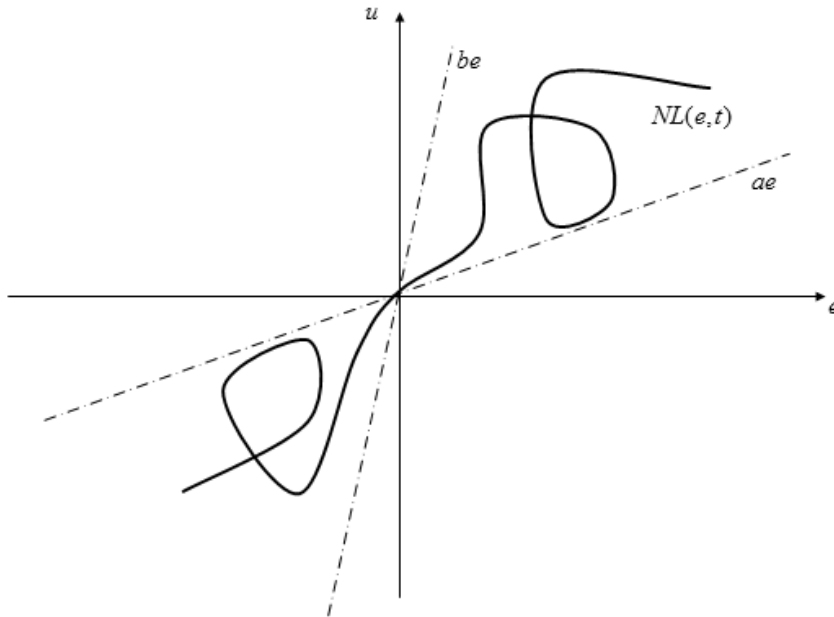


Figura 2.13: Non linearità generica tempo variante.

ante. Nel caso in cui si voglia studiare la stabilità con il criterio di Popov, sarebbe necessario portare l'intervallo a  $[0, b]$ ; d'altronde questo sarebbe troppo cautelativo e fornirebbe un risultato fin troppo sottostimato. Riferendoci ad una non linearità desiderata  $\hat{N}L(e)$ , il vincolo di settore  $ae < NL(e) < be$  può essere scritto come

$$\hat{N}L(e) = NL(e) - ae \Rightarrow \hat{N}L(e) + ae = NL(e) \quad (2.11)$$

cioè con  $\hat{N}L(e) \in [0, b - a]$ . Tale operazione è rappresentata nello schema *b*) di figura 2.15, equivalente allo schema *c*). Lo schema finale è riportato in *d*), sempre nella stessa figura, dove si è convenuto indicare con  $\hat{G} = \frac{G}{1+aG}$  la nuova funzione di trasferimento alla quale applicare lo studio tramite il criterio di Popov con una non linearità  $\hat{N}L(e) \in [0, b - a]$ .

Il nome dato a questa tecnica, **spostamento dei poli**, deriva dalle operazioni compiute sul sistema  $G$  di partenza. Per questo motivo questa tecnica può essere applicata con successo anche se la  $G(s)$  ha poli instabili in anello aperto. Se con lo spostamento dei poli è possibile rendere stabile la  $G(s)$  in anello aperto, è anche possibile studiare il sistema con Popov. Altrimenti resta pur sempre a disposizione il criterio del cerchio.

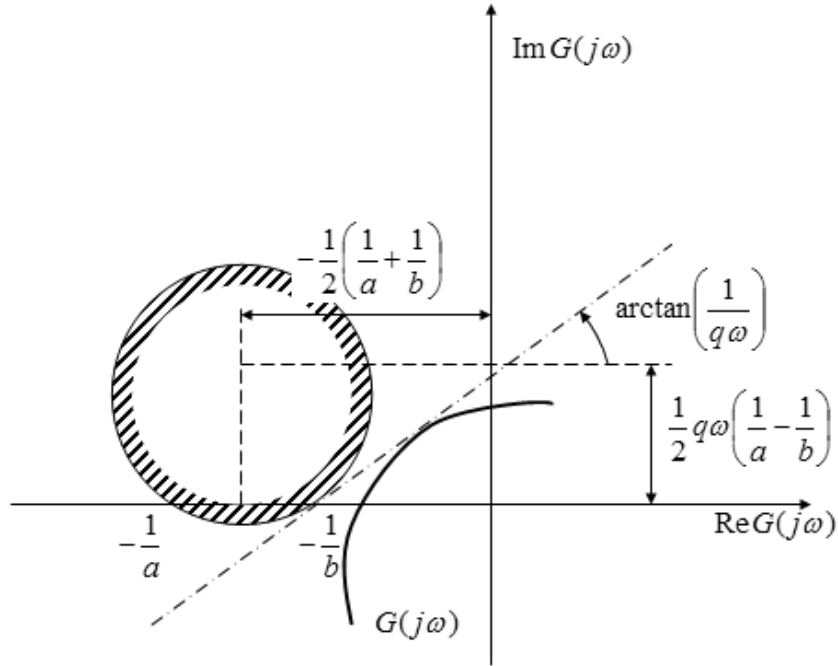


Figura 2.14: Criterio del cerchio generalizzato e suo legame con il criterio di Popov.

## 2.5.2 Spostamento degli zeri

Si consideri lo schema *a*) di figura 2.16. Se la non linearità è di tipo relé ideale (riportata in figura 2.10), quindi  $NL(e) \in [0, +\infty]$ , si deve ricorrere al criterio di Popov con  $q \geq 0$ . È possibile studiare un caso in cui la flessibilità di scelta sia maggiore, ossia una non linearità  $\hat{N}L(e) \in [0, \hat{b}]$  con  $\hat{b} < +\infty$ ?

In tal caso si consideri lo schema *b*) di figura 2.16, equivalente al precedente. Riportando l'influenza della somma del blocco *c* in ingresso, si ottiene lo schema *c*) di figura 2.16, dove si è convenuto indicare con  $\hat{G} = G - c$  la nuova funzione di trasferimento.

Si prenda adesso in considerazione il blocco  $\hat{N}L(e) = NL(e - c\hat{N}L(e))$ . Se siamo nella condizione di non linearità generica  $NL(e) \in [a, b]$ , ci chiediamo adesso come sarà il settore della non linearità  $\hat{N}L(e) \in [x, y]$ . A tal proposito, si considerino i due estremi del settore delle due non linearità

$$\begin{cases} NL(e) = ae \\ \hat{N}L(e) = xe \end{cases} \Rightarrow xe = ae - acxe \Rightarrow x = \frac{a}{1+ac} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} NL(e) = be \\ \hat{N}L(e) = ye \end{cases} \Rightarrow ye = be - bcy e \Rightarrow y = \frac{b}{1+bc}$$

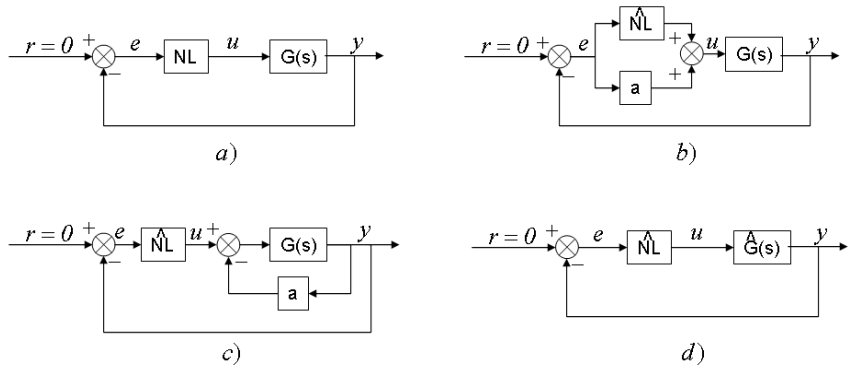


Figura 2.15: Variazione degli schemi per lo spostamento dei poli.

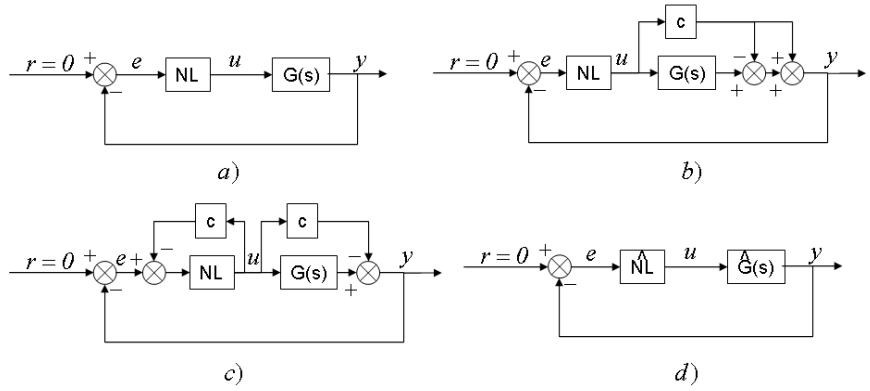


Figura 2.16: Variazione degli schemi per lo spostamento degli zeri.

Se si considerano i dati iniziali del problema  $a = 0$  e  $b \rightarrow +\infty$ , la non linearità ottenuta con questa tecnica è definita nel settore  $[0, \frac{1}{c}]$ .

Dato l'effetto ottenuto sulla parte lineare del sistema da questa particolare tecnica, essa viene chiamata **spostamento degli zeri**. Riassumendo, questa tecnica è in grado di alterare il settore di non linearità senza alterare le caratteristiche di stabilità della parte lineare (poli della  $G(s)$ ). Ovviamente la funzione di trasferimento che se ne ricava  $\hat{G}(s)$  sarà non strettamente propria.

## 2.6 Esempio riassuntivo

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = -\frac{s-1}{(s+1)^2} \quad (2.13)$$

il cui diagramma di Nyquist è riportato in figura 2.17, ed inserita a valle di una non linearità di settore  $NL(e) \in [a, b, ]$ .

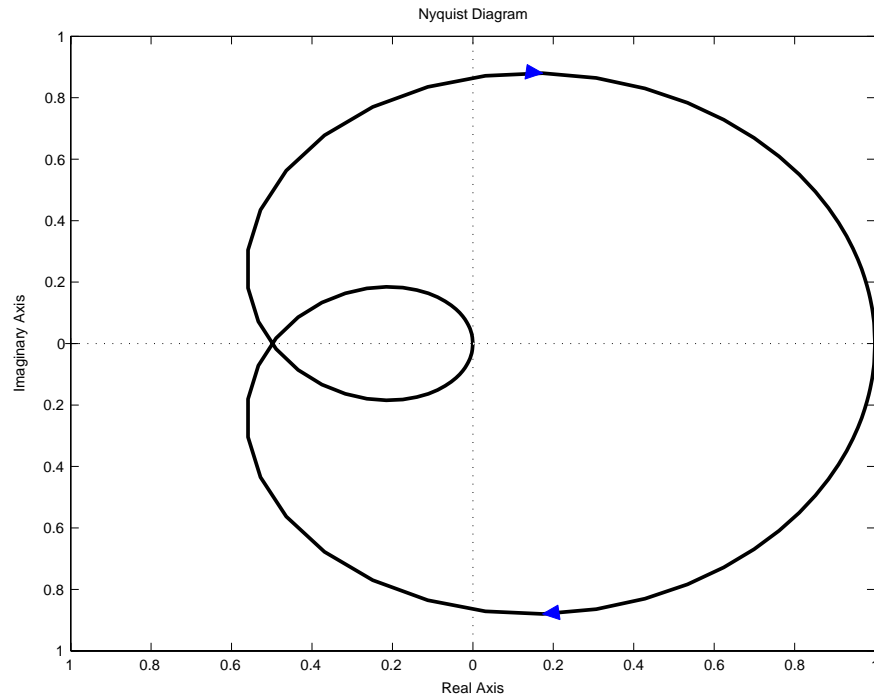


Figura 2.17: Diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento  $G(s) = -\frac{s-1}{(s+1)^2}$ .

Si noti come la funzione di trasferimento abbia eccesso poli-zeri pari ad uno ma arrivi con fase pari a  $-\frac{3}{2}\pi$ , data la presenza di uno zero positivo.

Applicando il criterio del cerchio ovvero di Popov è necessario riscrivere la  $G(j\omega)$  in parte reale ed immaginaria

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[G(j\omega)] &= \frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \\ \operatorname{Im}[G(j\omega)] &= \frac{(\omega^2-3)\omega}{(1+\omega^2)^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

- Si applichi per primo il criterio del cerchio. A tal proposito si identifichi il punto di attraversamento del diagramma di Nyquist con l'asse reale ed il punto dove si raggiunge il minimo valore reale ( $Im[G(j\omega)] = 0$ ) del diagramma di Nyquist

$$\begin{aligned} Im[G(j\omega)] = 0 &\Rightarrow \omega = \sqrt{3} \\ \min_{\omega}\{Re[G(j\omega)]\} : \frac{\partial Re[G(j\omega)]}{\partial \omega} = 0 &\Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{15}}{3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

al quale corrisponde  $Re[G(j1.05)] = -\frac{9}{16} \simeq -1/2$ . Da queste considerazioni segue che il sistema sarà assolutamente stabile se  $-1/b < -1/2 \Rightarrow b < 2$ . Rispetto al settore, si avrà  $2 > b > a > -1$ .

- Per il criterio di Popov si deve calcolare la funzione di trasferimento modificata

$$\begin{aligned} Re[G(j\omega)] &= R_p = \frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \\ Im[\omega G(j\omega)] &= I_p = \frac{(\omega^2-3)\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il punto di attraversamento della funzione di trasferimento di Popov con l'asse reale si ha per  $\omega = \sqrt{3}$ , al quale corrisponde il valore  $Re[G(j\sqrt{3})] = -1/2$ . Questo costituisce il limite per il settore, che sarà quindi  $[0, 2]$ .

Per trovare il valore di  $q$  (dipendente in segno dal tipo di non linearità utilizzata), si deve risolvere algebricamente la seguente equazione

$$\begin{aligned} R_p - qI_p + \frac{1}{b} &> 0 \\ 1 - 3\omega^2 - q\omega^2(\omega^2 - 3) + \frac{1}{2}(1 + \omega^2)^2 &> 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

di non banale soluzione.

- Nel caso la soluzione in forma chiusa sia di difficile calcolo, è possibile adottare la tecnica dello spostamento dei poli, studiando cioè una nuova  $G(s)$

$$\hat{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + aG(s)} = \frac{s - 1}{a(s - 1) - (s + 1)^2} \quad (2.18)$$

con  $0 < a \leq 2$ , intervallo nel quale la funzione di trasferimento  $\hat{G}(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa (asintoticamente stabile a ciclo aperto). Si noti che anche un valore negativo  $-1 < a < 0$  corrisponde ad avere la  $\hat{G}(s)$  asintoticamente stabile a ciclo aperto, condizione data dallo studio di un compensatore con retroazione positiva. Per  $a = 0$  ovviamente non si avrebbe alcun effetto sulla  $G(s)$  (retroazione nulla).

Quanto ricavato analiticamente utilizzando le tecniche classiche di controllo per ricavare l'intervallo di stabilità in relazione alla variazione

di  $a$  (si faccia attenzione che si deve variare il blocco di retroazione), poteva anche essere ricavato dallo studio della non linearità con il criterio del cerchio. Infatti, per  $0 < a \leq 2$  l'estremo superiore del settore varia da  $b = 2$  fino a  $b = 0$ , mantenendosi positivo, mentre quello inferiore diventa pari a  $-a$ : in questo caso la  $\hat{G}(s)$  deve essere interamente contenuta all'interno del cerchio delimitato dal settore  $(-1/a, -1/b)$ . L'effetto della retroazione su  $\hat{G}(s)$  è di diminuire il guadagno statico proporzionalmente a  $1/a$  e di aumentare, sempre proporzionalmente, il valore minimo della parte reale ed il punto di incontro con l'asse reale: la  $\hat{G}(s)$  risulta pertanto sempre contenuta nel cerchio delimitante la zona stabile. Con  $-1 < a < 0$  si ha invece che l'estremo superiore del settore varia da  $b = 2$  a  $b = 3$ , mentre quello inferiore è ancora  $-a$ . In tal caso il cerchio è interamente contenuto nel semipiano a parte reale negativa, verificando il criterio del cerchio finché  $a > -1$  (il valore minimo della parte reale ed il punto di incontro con l'asse reale si avvicinano proporzionalmente all'asse immaginario). È interessante notare come il parametro di spostamento dei poli vari tra il valore massimo ammissibile per il criterio di Popov ( $b = 2$ ) ed il valore che si ha per il guadagno statico della  $G(s)$  (1).

- Un'altra tecnica applicabile nel caso ci si imbatte in problemi analitici nell'applicazione del Criterio di Popov, è la tecnica dello spostamento degli zeri, ossia il calcolo di una nuova  $G(s)$

$$\hat{G}(s) = G(s) - c = -\frac{s-1}{(s+1)^2} - c \quad (2.19)$$

non strettamente propria.

Per quanto riguarda la stabilità a ciclo aperto della  $\hat{G}(s)$  non si hanno limiti sul valore del parametro  $c$ , ma l'inserimento di quest'ultimo permette di modificare opportunamente la parte reale ed immaginaria della  $G(j\omega)$ , semplificando la ricerca di una soluzione analitica in forma chiusa dei parametri  $q$  e  $\hat{b} = \frac{b}{1+bc}$ .

## 2.7 Effetti del ritardo sul sistema in retroazione

La presenza di un ritardo in una rete di controllo può inficiare l'effetto del controllore, portando il sistema complessivo in retroazione verso l'instabilità. Il controllore di Smith è in grado di compensare l'effetto del ritardo su una rete di controllo basandosi sul principio del Modello Interno.

Molto spesso però non è strettamente necessario studiare un controllore in grado di compensare gli effetti negativi del ritardo, ma è sufficiente avere delle informazioni sulla pericolosità del ritardo all'interno del loop di controllo. In particolare, date le caratteristiche di sfasatore del ritardo, è possibile condurre una valutazione diretta sull'effetto che il ritardo ha sul margine di fase e quindi, nel caso in cui il ritardo non possa essere modificato, condurre lo studio del controllore tenendo conto delle modifiche specifiche.

Si ipotizzi che il sistema senza ritardo  $G(s)$  abbia frequenza di taglio  $\omega = \omega_t$ , con margine di fase

$$M_\phi = \pi - \angle G(j\omega) \big|_{\omega=\omega_t} \quad (2.20)$$

Si consideri la funzione di trasferimento del ritardo finito  $T_0$  pari a  $G_r(s) = e^{-sT_0}$  e si analizzi il ritardo di fase introdotto nella catena di controllo come un disturbo, con modulo costantemente unitario e fase pari a

$$\angle G_r(j\omega) = \angle e^{-jT_0\omega} = -T_0\omega \quad (2.21)$$

Per valutare l'effetto del ritardo di anello sul margine di fase basta a questo punto prendere in considerazione la variazione del margine di fase dovuto al ritardo

$$\Delta M_\phi = -T_0\omega_t \quad (2.22)$$

### 2.7.1 Esempi

Si consideri un sistema in retroazione negativa avente la seguente funzione di trasferimento del guadagno di anello

$$G(s) = \frac{Ke^{-T_0s}}{(1 + \tau_1s)(1 + \tau_2s) \dots (1 + \tau_ns)} \quad (2.23)$$

di tipo 0 e si faccia l'ipotesi che  $T_0 \gg \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ .

Il diagramma di Nyquist della  $G(s)$ , riportato in figura 2.18, pur avendo la caratteristica forma a spirale, può essere rappresentato per basse frequenze da una circonferenza, dato che lo sfasamento introdotto dal ritardo si manifesta prima dell'effetto sulla fase e sul modulo delle altre singolarità del primo ordine.

Ricordando l'espressione della fase del ritardo (2.21), l'attraversamento con l'asse reale negativo si ha per  $\omega_t = \frac{\pi}{T_0}$ . Per la stabilità asintotica, ossia per il Criterio di Nyquist, deve essere quindi soddisfatta la condizione  $K < 1$ , corrispondente ad un limite inaccettabile per il guadagno di anello in quanto degraderebbe l'errore a regime nella risposta ad un riferimento a gradino oltreché peggiorare la sensibilità o la capacità di reiezione ai disturbi.



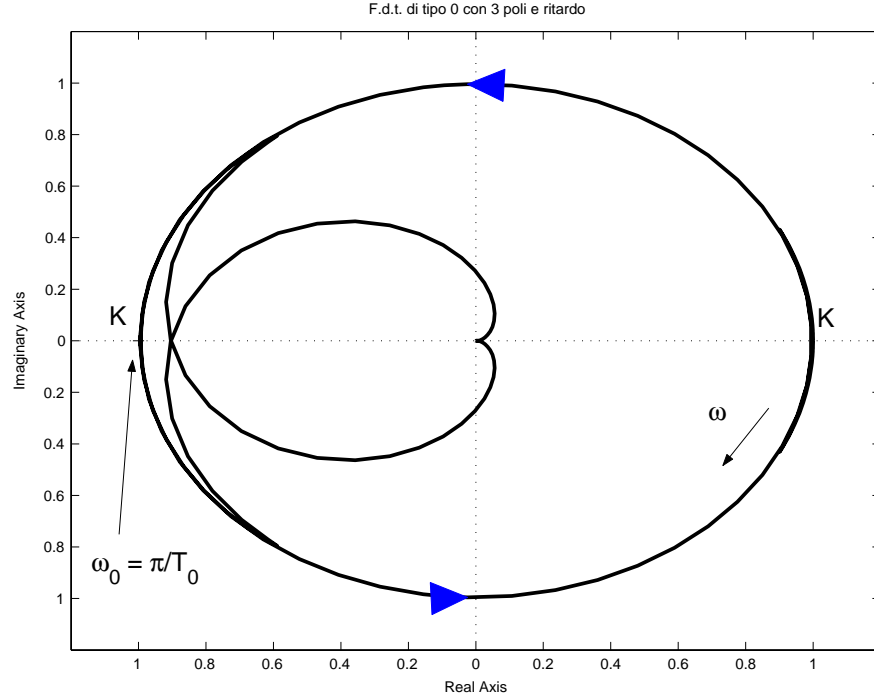


Figura 2.18: Diagramma di Nyquist della  $G(s)$  con  $n = 3$ .

Avendo la possibilità di inserire un controllore a monte della  $G(s)$ , conviene inserire una azione di tipo integrale, inserendo cioè un polo nell'origine

$$G_c(s) = C(s)G(s) = \frac{K e^{-T_0 s}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_n s)} \quad (2.24)$$

il quale introduce un ritardo di fase di  $-\pi/2$ . Notando che i contributi di fase delle altre singolarità sono di nuovo trascurabili, la nuova pulsazione di taglio sarà  $\omega_t = \pi/(2T_0)$  dovendo essere pari a  $-\pi/2$  il contributo del ritardo finito in corrispondenza di tale pulsazione. Il diagramma di Nyquist che si ottiene in questo secondo caso è riportato in figura 2.19.

La condizione di stabilità asintotica si ottiene andando a valutare il margine di fase  $M_\phi$ , ossia imponendo  $|G_c(j\omega_t)| < 1$ , dalla quale si ottiene la condizione sul guadagno statico di anello  $K < \pi/(2T_0)$ .

## 2.8 Il Principio del Modello Interno

Il **Principio del Modello Interno** (ossia *Internal Model Principle*) asserisce che un controllore può essere implementato se il sistema di controllo

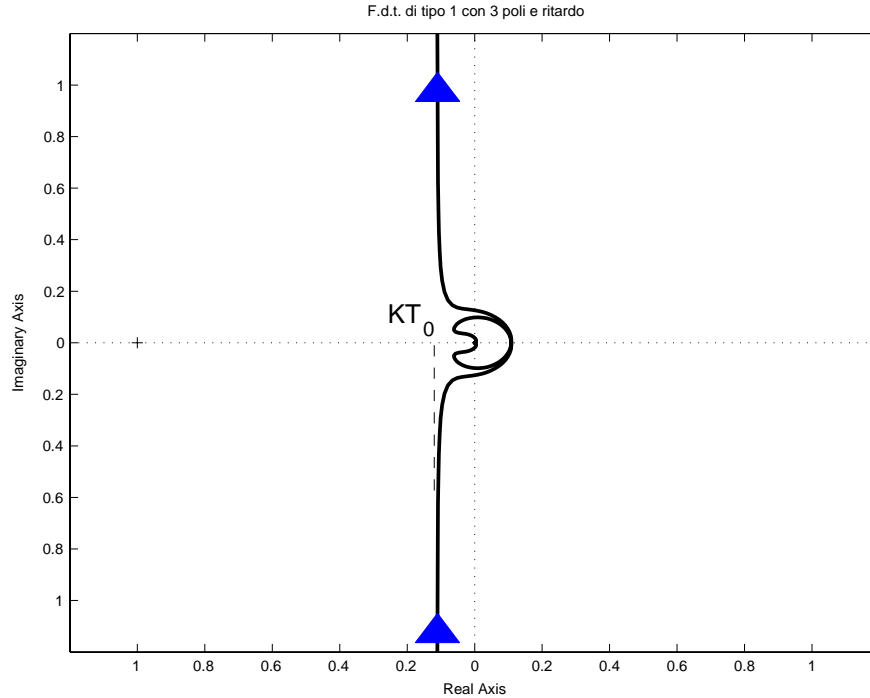


Figura 2.19: Diagramma di Nyquist della  $G_c(s)$  con  $n = 3$ .

nel suo complesso incapsula al suo interno, esplicitamente o implicitamente, una qualche rappresentazione (modello) del processo da controllare. Uno dei possibili controllori che ne scaturiscono è l'*Internal Model Control* (o IMC), controllore teoricamente perfetto. Un controllore IMC è però criticamente legato alla conoscenza perfetta del processo da controllare, e quindi alla concreta possibilità di avere un modello esatto del processo stesso.

Si consideri ad esempio lo schema generico riportato in figura 2.20, a sinistra. Il processo  $G(s)$  è collegato a valle di un controllore  $C(s)$ . Si supponga di avere a disposizione un modello del processo da controllare  $\tilde{G}(s)$  e di utilizzare un controllore  $C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$ , con nessuna incertezza di modello ( $G(s) = \tilde{G}(s)$ ). In tal caso si otterrebbe un inseguimento perfetto  $r = y$  in catena aperta. Il fatto importante è che avendo una perfetta conoscenza del processo da controllare (incapsulata nel modello di riferimento), è possibile implementare un controllore perfetto. La necessità di controlli in retroazione si ha quando non è disponibile un modello perfetto o completo del processo da controllare.

Nella pratica, gli errori di modellazione, la presenza di disturbi esterni o la semplice impossibilità nell'invertire il modello (causalità) non rendono

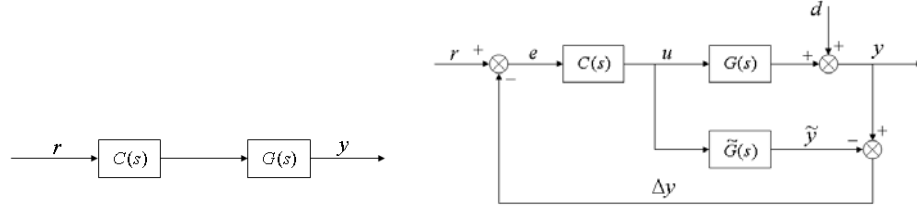


Figura 2.20: Sinistra: generico sistema in catena aperta di un impianto  $G(s)$  collegato a valle di un controllore  $C(s)$ . Destra: struttura generica per l'Internal Model Control.

praticabile questo approccio. Comunque questo ragionamento è alla base dello sviluppo di un controllo perfetto basato su IMC, la cui struttura è riportata in figura 2.20, a destra;  $D(s)$  è la funzione di trasferimento del disturbo esterno sconosciuto  $d$ ,  $U(s)$  è l'ingresso del processo e del relativo modello. L'uscita del sistema  $Y(s) = G(s)U(s) + D(s)$  è confrontata con l'uscita del modello

$$\Delta Y(s) = [G(s) - \tilde{G}(s)]U(s) + D(s) \quad (2.25)$$

In assenza di disturbo,  $\Delta Y(s)$  dà una misura della differenza di comportamento tra processo e modello. In assenza di incertezza sul modello, lo stesso segnale dà una informazione sul disturbo esterno. In altri termini,  $\Delta Y(s)$  contiene una serie di informazioni che non sono state incapsulate nel modello del sistema e può essere utilizzato per migliorare il controllo. È quindi possibile confrontare questo segnale altamente informativo con il riferimento esterno e combinare il risultato per calcolare il segnale di controllo

$$\begin{aligned} U(s) &= [R(s) - \Delta Y(s)]C(s) = \{R(s) - [G(s) - \tilde{G}(s)]U(s) - D(s)\}C(s) \Rightarrow \\ U(s) &= \frac{[R(s) - D(s)]C(s)}{1 + [G(s) - \tilde{G}(s)]C(s)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Per l'uscita si ha quindi

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)R(s) + [1 - C(s)\tilde{G}(s)]D(s)}{1 + [G(s) - \tilde{G}(s)]C(s)} \quad (2.27)$$

Nelle condizioni ideali,  $G(s) = \tilde{G}(s)$  e  $C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$ , si ha una perfetta reiezione ai disturbi ed un inseguimento perfetto. In teoria, la perfetta reiezione dei disturbi può essere ancora ottenuta nel caso in cui si abbia imperfetta conoscenza del modello, purché il modello sia invertibile.

**Osservazione 2.5.** *Per migliorare la robustezza dell'intero schema è necessario migliorare la sensibilità rispetto alle incertezze di modello. Nei casi pratici, gli errori di modellazione compaiono alle alte frequenze nella banda delle frequenze presenti nella risposta del processo sotto esame. Inoltre, nel caso in cui si controlli un sistema meccanico, questo si comporta naturalmente da filtro passa basso. Da queste osservazioni discende che è possibile limitare gli effetti degli errori di modellazione qualora si progetti il controllore  $C_{imc}(s)$  come l'inverso del modello in serie ad un filtro passa basso*

$$LP(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^n} \quad (2.28)$$

di ordine  $n$  appropriato. Si noti che l'effetto del filtro è utile anche per la causalità del controllore totale  $C_{imc}(s) = LP(s)\tilde{G}(s)^{-1}$ .

In pratica, per l'implementazione del controllore si divide il modello del processo nella componente invertibile e non invertibile

$$\tilde{G}(s) = \tilde{G}^-(s)\tilde{G}^+(s) \quad (2.29)$$

La parte non invertibile  $\tilde{G}^+(s)$  contiene gli zeri positivi ed i ritardi, ovvero i termini che invertiti potrebbero portare verso l'instabilità o l'irrealizzabilità del controllore. Il controllore sarà dunque  $C_{imc}(s) = LP(s)\tilde{G}^-(s)^{-1}$ , con un filtro passa basso dell'appropriato ordine  $n$ . In questo caso l'uscita diventa

$$Y(s) = \frac{G(s)LP(s)\tilde{G}^-(s)^{-1}}{1+[G(s)-\tilde{G}(s)]LP(s)\tilde{G}^-(s)^{-1}}R(s) + \frac{[1-\tilde{G}^+(s)LP(s)]}{1+[G(s)-\tilde{G}(s)]LP(s)\tilde{G}^-(s)^{-1}}D(s) \quad (2.30)$$

che, in caso di modellazione perfetta, diviene

$$Y(s) = LP(s)G^+(s)R(s) + [1 - G^+(s)LP(s)]D(s) \quad (2.31)$$

Nel caso, sempre possibile, si scelga  $G^+(s)$  e  $LP(s)$  con guadagno statico unitario, è possibile reiettare perfettamente a regime i disturbi  $d$  costanti ed inseguire perfettamente riferimenti costanti  $r$ .

**Osservazione 2.6.** *La soluzione fornita dal modello di controllore IMC è una variazione del feedforward ottenuta sottraendo al riferimento il termine correttivo dovuto all'incertezza  $\Delta Y(s)$ .*

**Osservazione 2.7.** *Non sono necessarie alcune ipotesi sul sistema  $G(s)$ , il quale può essere sia instabile che non lineare.*

## 2.8.1 Il compensatore di Smith

Il compensatore di Smith (O. J. M. Smith) si basa direttamente sul predittore di Smith, tanto è vero che spesso in letteratura vengono adottati indifferentemente. Tale schema di controllo è utilizzato nel caso in cui un compensatore di tipo digitale non può essere utilizzato, principalmente per problemi di frequenza di campionamento.

Si consideri quindi un sistema avente la funzione di trasferimento ritardata  $G_{T_0}(s) = G(s)e^{-T_0s}$ . Il compensatore di Smith cerca di eliminare l'effetto del ritardo  $T_0$  dal sistema complessivo in catena chiusa, permettendo la progettazione del controllore come se il ritardo non fosse presente, utilizzando lo schema di figura 2.21, a sinistra.

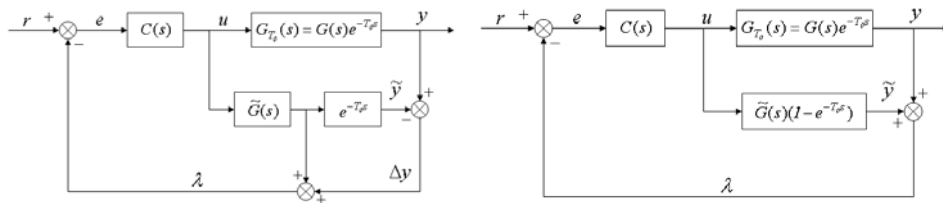


Figura 2.21: Sinistra: schema rappresentante l'idea di base del compensatore di Smith. Destra: schema equivalente del compensatore di Smith.

Ignorando momentaneamente il segnale  $\Delta Y(s)$ , si ha un modello dell'impianto  $\tilde{G}(s)$  privo del ritardo che genera il segnale di retroazione al posto del segnale di uscita, coerente con quanto detto sul Principio del Modello Interno se si ha a disposizione un buon modello dell'impianto ed un sistema complessivamente privo del ritardo. Per non trascurare gli errori presenti nel modello o la presenza di eventuali disturbi, anche il ritardo è modellato e aggiunto per generare un modello dell'uscita reale, comprendente ovviamente il ritardo. In figura 2.21 (sinistra) viene così aggiunto il segnale  $\Delta Y(s) = Y(s) - \tilde{Y}(s)$ , come presentato nel paragrafo 2.8. Combinando opportunamente i blocchi funzionali si giunge alla rappresentazione equivalente di figura 2.21 (destra), maggiormente significativa perché mette in luce il blocco predittore che effettivamente *predice* l'uscita del sistema. In effetti, sapendo che

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_{T_0}(s)U(s) \\ \Lambda(s) &= \tilde{G}(s)(1 - e^{-T_0s})U(s) + G_{T_0}(s)U(s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

ed assumendo un modello perfetto  $\tilde{G}(s)e^{-T_0s} = \tilde{G}_{T_0}(s) = G_{T_0}(s) = G(s)e^{-T_0s}$ ,

si ottiene

$$\Lambda(s) = \frac{G(s)}{G_{T_0}(s)}Y(s) \Rightarrow \Lambda(s) = e^{T_0s}Y(s) \quad (2.33)$$

la quale ci permette di asserire che il predittore di Smith predice l'effetto che la variabile di controllo  $U(s)$  ha sull'uscita del sistema  $Y(s)$  e modifica la retroazione di conseguenza.

L'analisi della stabilità del sistema complessivo può essere fatta direttamente con i criteri visti per gli schemi IMC. Comunque, un'analisi può anche essere condotta modificando opportunamente i blocchi del sistema. Si consideri il montaggio equivalente di figura 2.22, a sinistra.

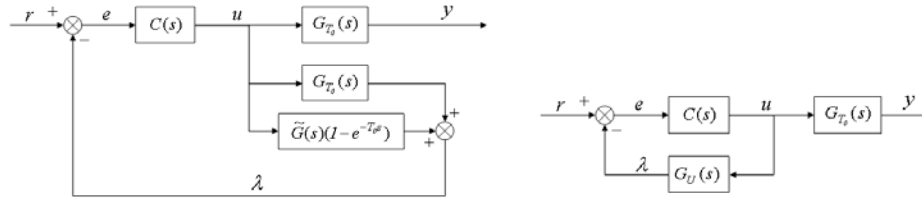


Figura 2.22: Schemi di montaggio equivalenti del compensatore di Smith.

In questo modo si ottengono due retroazioni parallele della  $U(s)$  che possono essere banalmente sommate per ottenere la funzione di trasferimento complessiva  $G_U(s) = G_{T_0}(s) + \tilde{G}(s)(1 - e^{-T_0s})$ . Assumendo nuovamente che non ci siano errori di modellazione del sistema e del ritardo finito  $T_0$ , si ottiene immediatamente che  $G_U(s) = G(s)$ . La funzione di trasferimento finale tra riferimento ed uscita sarà quindi

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}G_{T_0}(s) = K(s)G_{T_0}(s) \quad (2.34)$$

La  $G_{T_0}(s)$  non compare esplicitamente in  $K(s)$ , quindi il sistema in retroazione sarà stabile se e solo se entrambe le funzioni di trasferimento  $G_{T_0}(s)$  e  $K(s)$  lo sono. Da questa proprietà discende che il predittore di Smith può essere applicato solo a sistemi stabili in anello aperto. Inoltre, dalla (2.34) è possibile notare come effettivamente il compensatore di Smith sia in grado di togliere l'effetto destabilizzante del ritardo, ossia in termini di posizionamento dei poli, mostrando come la stabilità a ciclo chiuso sia identica a quella ottenuta se nell'impianto si fosse ignorato l'effetto del ritardo. Il ritardo compare comunque nel numeratore della funzione di trasferimento complessiva e modificherà apprezzabilmente l'andamento dell'uscita rispetto ad un modello non ritardato.

**Osservazione 2.8.** *Il compensatore di Smith è criticamente legato ad una modellazione accurata dell'impianto da controllare e, soprattutto, del ritardo da compensare. D'altronde il problema dell'accuratezza del modello si ripropone in tutti i metodi per il progetto dei sistemi di controllo, pesato a seconda dell'adozione di tecniche di controllo robusto.*

# Capitolo 3

## Il fenomeno delle autoscillazioni

### 3.1 Introduzione

Un fenomeno che può essere innescato dalla caratteristica non lineare di un trasduttore è la generazione di una oscillazione persistente, di entità anche non piccola, chiamata “ciclo limite”.

Questo comportamento, desiderabile in alcuni sistemi (per esempio, oscillatori elettronici o motori endotermici), è invece dannoso quando si instaura in sistemi nei quali non è intenzionalmente previsto: un tipico esempio in questo senso è l'oscillazione persistente che può instaurarsi in asservimenti di posizione elettromeccanici in cui si usino trasmissioni meccaniche con gioco (vedi figura 3.1).

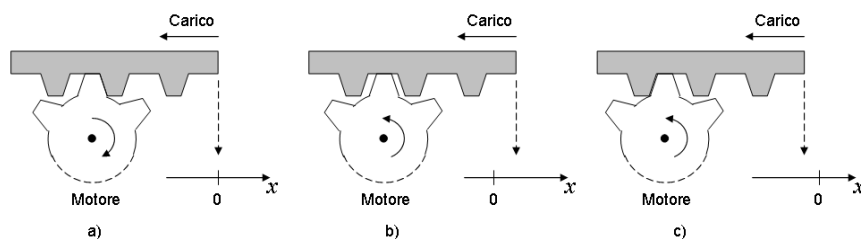


Figura 3.1: Esempio di sistema meccanico con gioco.

L'attuatore che comanda il pignone è asservito in modo da mantenere la posizione del cursore fissato alla dentiera nella posizione zero. Una perturbazione del carico (ad es. una diminuzione temporanea) fa sì che il cursore si sposti verso destra (b). Il controllore agisce sull'attuatore che ruota verso sinistra per riportare il sistema in equilibrio. A causa del gioco, il pignone



giunge in contatto col dente a sinistra solo dopo aver percorso un tratto libero, nel quale ha accelerato ed ha acquistato energia cinetica. Quando il contatto viene ripristinato, l'inerzia dell'attuatore può fare in modo che il set-point sia di nuovo superato sulla sinistra, ed il fenomeno si ripresenta in direzione inversa.

Il gioco meccanico può essere schematizzato come una tipica non linearità ad isteresi. Da un punto di vista puramente intuitivo si può comprendere come l'isteresi possa causare un comportamento autoscillante, data la sua caratteristica di non linearità con memoria. Altri tipi di non linearità, apparentemente meno "predisposte" verso l'autoscillazione, possono generare questi tipi di comportamenti.

Si prenda in considerazione un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(s^2 + 7s + 10)} \quad (3.1)$$

Per il Criterio di Nyquist, il sistema può diventare instabile a ciclo chiuso aumentando il guadagno. Si inserisca una non linearità di saturazione con pendenza variabile  $c$  e con valori in uscita saturati tra  $\pm 1/2$ . I risultati che si ottengono, una volta che si solleci il sistema con un gradino unitario, sono riportati in figura 3.2.

Come si può notare, la maggiore pendenza corrisponde ad un aumento del guadagno del sistema in catena aperta che, come notato in precedenza, può portare all'instabilità.

È interessante notare come l'instabilità non si manifesti con una crescita dell'uscita indefinita, ma il sistema si porti in un ciclo limite nel quale oscilla permanentemente. Questo fenomeno rispecchia quanto accade in realtà nei sistemi instabili: nella pratica ogni sistema di attuazione è affetto da non linearità che ne limitano in ampiezza le uscite. Ad esempio, ponendo un microfono di fronte ad una cassa alla quale è collegato tramite un amplificatore, si udirà un fischio crescere in intensità finché non si assesta su un valore limite dovuto ai limiti di attuazione (volume massimo sopportabile dalla cassa), ai limiti di amplificazione (potenza massima erogabile dall'amplificatore) ed ai limiti sul sensore (sensibilità limitata dal range di ingresso).

Per la frequenza con cui si incontra nel controllo dei sistemi, il fenomeno delle autoscillazioni è di grande importanza. Per quanto piuttosto complesso da studiare in modo esatto, esiste un metodo che, basandosi su ipotesi abbastanza restrittive e utilizzando un procedimento non rigorosissimo teoricamente, riesce a dare affidabili indicazioni di massima in modo semplice. Questo metodo è detto della **Funzione Descrittiva** o di *prima armonica*.

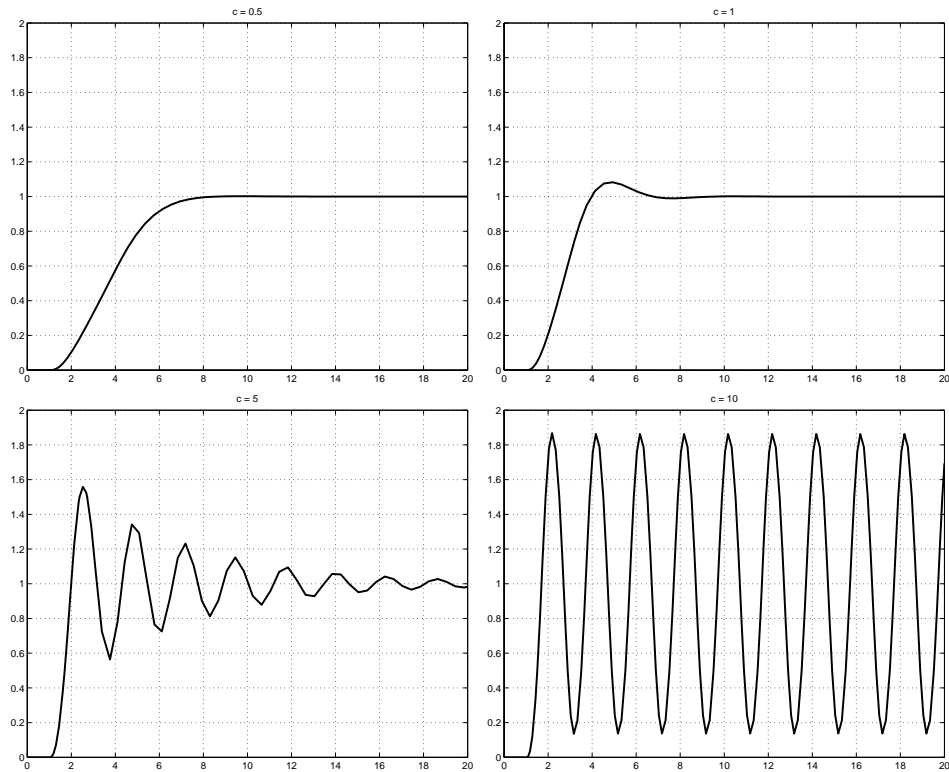


Figura 3.2: Esempio di sistema con saturazione crescente:  $c = 0.5$ ,  $c = 1$ ,  $c = 5$  e  $c = 10$ .

## 3.2 Funzione Descrittiva

Il metodo della funzione descrittiva si applica allo studio dei sistemi lineari connessi con elementi non lineari quasi-statici, come in figura 3.3

Si consideri il caso in cui il riferimento esterno  $r$  sia lentamente variabile rispetto alle dinamiche interne del sistema, in modo da poterlo considerare costante (in particolare nullo), e si assuma che la non linearità sia simmetrica rispetto all'origine. Si supponga inoltre che la  $G(s)$  abbia una caratteristica marcatamente passa-basso (ipotesi restrittiva che più limita l'applicabilità del metodo a casi più generali).

Si consideri un segnale sinusoidale in uscita

$$y(t) = Y \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

che rappresenta quindi l'ingresso del trasduttore. La misura ottenuta è

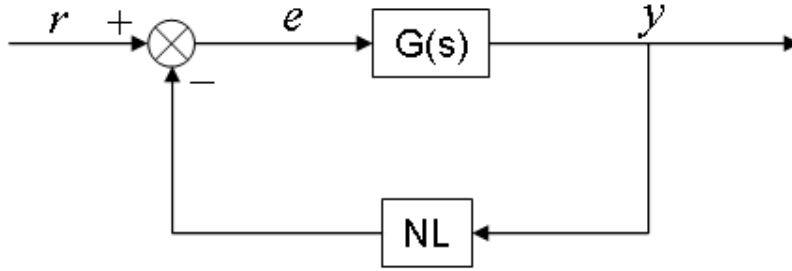


Figura 3.3: Sistema generico composto da una parte lineare con funzione di trasferimento  $G(s)$  e chiuso in retroazione negativa con un elemento non lineare quasi-statico.

senz'altro esprimibile con una serie di Fourier di periodo  $T = 2\pi/\omega$ , quindi

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\omega t) + E'_n \cos(n\omega t) \quad (3.3)$$

dove

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e(t) d\omega t \\ E_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e(t) \sin(n\omega t) d\omega t \\ E'_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e(t) \cos(n\omega t) d\omega t \end{aligned} \quad (3.4)$$

La serie di Fourier può essere anche riscritta come

$$e(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad (3.5)$$

con

$$\begin{aligned} A_0 &= E_0 \\ A_n &= \sqrt{E_n^2 + E'_n{}^2} \\ \gamma_n &= \arctan \frac{E'_n}{E_n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

In seguito alla ipotesi di simmetria della risposta del trasduttore rispetto all'origine si avrà  $E_0 = 0$ .

Come conseguenza dell'ipotesi sul carattere passa-basso del sistema lineare, il comportamento dell'anello chiuso si può studiare in modo approssimato troncandola serie di Fourier alla prima armonica, cioè ponendo

$$e(t) \simeq E_1 \sin(\omega t) + E'_1 \cos(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) = E \sin(\omega t + \phi) \quad (3.7)$$

In generale, l'ampiezza  $E$  e la fase  $\phi$  della prima armonica contenuta nel segnale di misura del trasduttore sono funzioni della ampiezza  $Y$  del segnale di ingresso.

Definiamo la funzione complessa (**Funzione Descrittiva**)

$$F(Y) = \frac{E(Y)}{Y} e^{j\phi(Y)} \quad (3.8)$$

il cui modulo rappresenta il rapporto tra l'ampiezza dei segnali in uscita ed in ingresso al trasduttore, ed il cui argomento ne rappresenta lo sfasamento.

Poiché si trascura nel segnale di misura ogni armonica superiore alla prima, si avrà che una oscillazione autosostenuta del sistema si verificherà quando un segnale  $e(t)$ , attraversando il sistema  $G(s)$ , il trasduttore  $NL$  ed il comparatore col riferimento, si ripresenta uguale a se stesso all'ingresso del sistema. In altri termini, i segnali per i quali

$$-F(Y)G(j\omega) = 1 \quad (3.9)$$

si "autosostengono" nell'anello. Questa relazione complessa corrisponde alle due relazioni reali

$$\begin{cases} |F(Y)||G(j\omega)| = 1 \\ \phi(Y) + \angle G(j\omega) = (1 + 2\mu)\pi, \mu = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

scritte nelle incognite  $Y$  e  $\omega$ , cioè ampiezza e pulsazione del segnale autosostenuto, ovvero del ciclo limite.

Le soluzioni di queste equazioni possono essere trovate graficamente con la procedura descritta in figura 3.4.

In figura 3.4, i possibili cicli limite corrispondono alle intersezioni del diagramma di Nyquist di  $G(j\omega)$  con il "luogo caratteristico" delle non linearità, cioè il diagramma della funzione  $-1/F(Y)$ . Ampiezza e pulsazione sono ricavabili dalla graduazione dei due luoghi. Si noti che i cicli limite sono particolari condizioni di "equilibrio", e pertanto possono essere stabili o meno.

### 3.2.1 Stabilità delle autoscillazioni

Si supponga di avere individuato un ciclo limite tramite l'intersezione tra il diagramma di Nyquist ed il luogo caratteristico della non linearità. Tale ciclo limite avrà una propria pulsazione  $\omega_0$  ed una propria ampiezza  $Y_0$ , corrispondente alle radici dell'equazione

$$1 + F(Y)G(j\omega) = 0 \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{F(Y)} \quad (3.11)$$

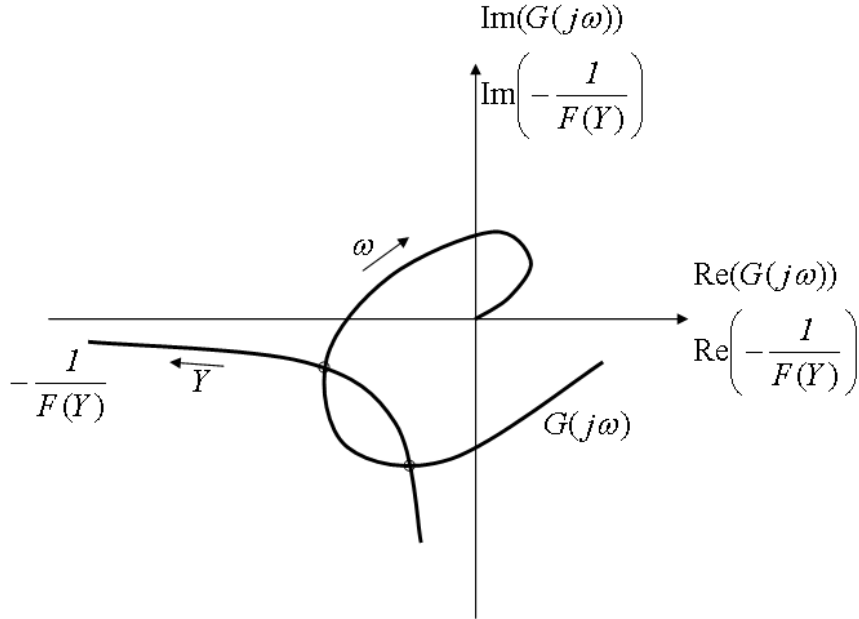


Figura 3.4: Metodo grafico per trovare i cicli limite col metodo della prima armonica.

Riscrivendo la funzione di trasferimento lineare e la funzione caratteristica nella loro rispettiva parte reale ed immaginaria

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= R_g(\omega) + jI_g(\omega) \\ -\frac{1}{F(Y)} &= R_f(Y) + jI_f(Y) \end{aligned} \quad (3.12)$$

e separandone parte reale ed immaginaria

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, Y) &= R_g(\omega) - R_f(Y) \\ \beta(\omega, Y) &= I_g(\omega) - I_f(Y) \end{aligned} \quad (3.13)$$

è possibile ottenere la seguente forma della equazione (3.11)

$$\alpha(\omega, Y) + j\beta(\omega, Y) = 0 \quad (3.14)$$

L'effetto di una perturbazione è quello di modificare la oscillazione di equilibrio

$$Y(t) = Y_0 e^{j\omega_0 t} \quad (3.15)$$

in una funzione con ampiezza, pulsazione e smorzamento leggermente diversi

$$Y(t) = (Y_0 + \tilde{Y}) e^{j(\omega_0 + \tilde{\omega})t} e^{-\delta t} \quad (3.16)$$

Le variazioni  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{\omega}$  e  $\delta$  si ottengono partendo dalla equazione

$$\alpha(\omega_0 + \tilde{\omega} + j\delta, Y_0 + \tilde{Y}) + j\beta(\omega_0 + \tilde{\omega} + j\delta, Y_0 + \tilde{Y}) = 0 \quad (3.17)$$

e considerando lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine rispettivamente della parte reale e della parte immaginaria

$$\begin{cases} \frac{\partial\alpha}{\partial\tilde{\omega}}\tilde{\omega} + \frac{\partial\alpha}{\partial\tilde{Y}}\tilde{Y} - \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\delta = 0 \\ \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\tilde{\omega} + \frac{\partial\beta}{\partial\tilde{Y}}\tilde{Y} + \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\delta = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

ovvero, eliminando la variabile  $\tilde{\omega}$ ,

$$\left[ \left( \frac{\partial\alpha}{\partial\omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right)^2 \right] \delta = \left[ \frac{\partial\alpha}{\partial Y} \frac{\partial\beta}{\partial\omega} - \frac{\partial\beta}{\partial Y} \frac{\partial\alpha}{\partial\omega} \right] \tilde{Y} \quad (3.19)$$

Le oscillazioni saranno stabili se ad un aumento dell'ampiezza dell'oscillazione corrisponde uno smorzamento positivo, mentre ad una diminuzione della oscillazione corrisponde uno smorzamento negativo (ossia una amplificazione del segnale); in altri termini  $\delta$  e  $\tilde{Y}$  devono avere lo stesso segno. Deriva da Loeb la deduzione della condizione

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y} \frac{\partial\beta}{\partial\omega} - \frac{\partial\beta}{\partial Y} \frac{\partial\alpha}{\partial\omega} > 0 \quad (3.20)$$

La condizione di stabilità diviene quindi

$$-\frac{\partial R_f}{\partial Y} \frac{\partial I_g}{\partial\omega} + \frac{\partial I_f}{\partial Y} \frac{\partial R_g}{\partial\omega} > 0 \quad (3.21)$$

che è possibile interpretare se si intende questa condizione nel senso della componente normale al piano complesso del prodotto vettoriale

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \wedge \frac{d}{dY} \left( -\frac{1}{F(Y)} \right) \quad (3.22)$$

componente che deve essere positiva.

Si avranno cicli stabili quando, nell'intorno dei punti di intersezione, l'effetto di un piccolo aumento della frequenza (sul luogo di Nyquist) e quello della diminuzione di ampiezza del ciclo (sul luogo caratteristico) sono concordi. Il ciclo è stabile se la direzione tangente al luogo di Nyquist  $\vec{g}$  e quella tangente al luogo caratteristico  $\vec{c}$  danno luogo ad un vettore-prodotto  $\vec{g} \times \vec{c}$  uscente dal foglio.

### 3.2.2 Funzione Descrittiva di alcune tipiche non linearità

Segue di seguito un elenco delle non linearità più comuni presenti nei trasduttori di misura e negli organi di attuazione.

- *Saturazione*: è un fenomeno presente in tutti i sistemi fisici, assai comune nei trasduttori, così come anche negli attuatori usati per il controllo automatico, e che ricorre assai spesso nelle applicazioni del metodo della Funzione Descrittiva. Si consideri pertanto l'andamento della risposta di un trasduttore con saturazione ideale (figura 3.5 a sinistra).

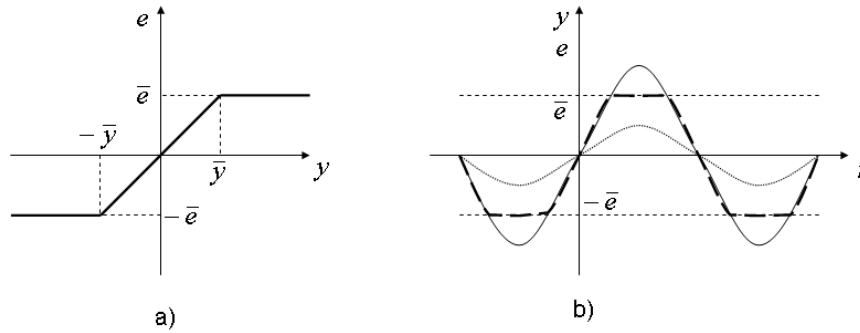


Figura 3.5: Risposta caratteristica di un trasduttore con saturazione ideale (a) ed andamento del segnale di ingresso (tratto continuo) e di uscita (tratteggiato) del trasduttore (b).

Ponendo in ingresso il segnale sinusoidale di prova (3.2), qualitativamente si può osservare che

$$\begin{cases} \text{Se } Y \leq \bar{y} \Rightarrow e(t) = \frac{\bar{e}}{\bar{y}}y(t), F(Y) = \frac{\bar{e}}{\bar{y}} \\ \text{Se } Y \gg \bar{y} \Rightarrow F(Y) = \frac{\bar{e}}{Y} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

e  $\forall Y$  si ha  $\phi(Y) = 0$ .

Il luogo caratteristico (figura 3.6) appartiene completamente all'asse reale ( $\phi(Y) = 0$ ) ed inizia in  $-1/F(0) = -\bar{y}/\bar{e}$  e termina in  $-1/F(+\infty) = -\infty$

Applicando invece la definizione, la funzione descrittiva della saturazione è ottenuta nella forma seguente

$$F(Y) = \begin{cases} \text{Se } Y \leq \bar{y} \Rightarrow \frac{\bar{e}}{\bar{y}} \\ \text{Se } Y \geq \bar{y} \Rightarrow \frac{2\bar{e}}{\pi\bar{y}} \left( \arcsin \frac{\bar{y}}{Y} + \frac{\bar{y}}{Y} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{y}}{Y}\right)^2} \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

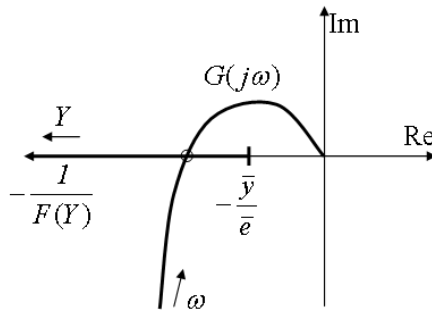


Figura 3.6: Luogo caratteristico della Funzione Descrittiva per la saturazione e possibile luogo di Nyquist per un sistema con un polo nell'origine e grado relativo 3.

che conferma le ipotesi sulla fase della Funzione Descrittiva (funzione caratteristica sempre reale). Il luogo caratteristico coincide con quello riportato in figura 3.6, assieme ad un possibile luogo di Nyquist per un sistema con un polo nell'origine e grado relativo 3. Il ciclo limite è stabile.

- *Soglia* (zona morta): anche questa non linearità è frequente in molti trasduttori, e consiste nella assenza di segnale nell'intorno del punto zero (si veda la figura 3.7, a) e di un andamento lineare (con pendenza generica  $c$ ) fuori dalla zona morta.

La sua funzione descrittiva è ottenuta semplicemente sommando quelle relative ad una risposta lineare e ad una saturazione figura 3.7, b), entrambe di pendenza  $c$ . Si ha quindi

$$F(Y) = \begin{cases} \text{Se } Y \leq \bar{y} \Rightarrow 0 \\ \text{Se } Y \geq \bar{y} \Rightarrow c \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{\bar{y}}{Y} + \frac{\bar{y}}{Y} \sqrt{1 - \left( \frac{\bar{y}}{Y} \right)^2} \right) \right] \end{cases} \quad (3.25)$$

ed il corrispondente luogo caratteristico riportato in figura 3.8.

Il luogo è in questo caso la semiretta negativa reale: il ciclo limite per un sistema di tipo 1 e grado relativo 3 preso ad esempio è in questo caso instabile.

**Osservazione 3.1.** *Il segnale di uscita dalla non linearità può essere espresso come somma dei due segnali di uscita dei due blocchi. Poiché*



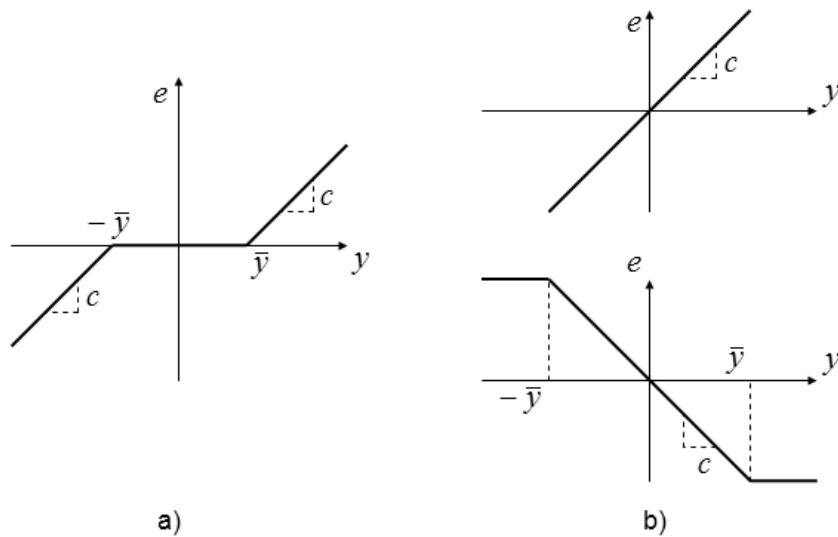


Figura 3.7: Risposta caratteristica di un trasduttore con soglia (a) e rispettive componenti (b).

*le fondamentali dei due segnali hanno la stessa pulsazione, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della somma sono dati dalla somma dei coefficienti degli sviluppi relativi alle uscite dei due blocchi e la Funzione Descrittiva del complesso risulta uguale alla somma delle Funzioni Descrittive dei due blocchi.*

- *Caratteristiche lineari a tratti:* comune a molti trasduttori non lineari, la cui caratteristica è approssimata con un andamento lineare a tratti (figura 3.9, a)).

Procedendo ancora per somma di caratteristiche di saturazioni, è possibile calcolare facilmente la funzione descrittiva approssimata di una qualsiasi non linearità senza memoria. Nell'esempio riportato, la approssimazione lineare è ottenuta per composizione delle non linearità riportate in figura 3.9 b), utili alla determinazione della funzione

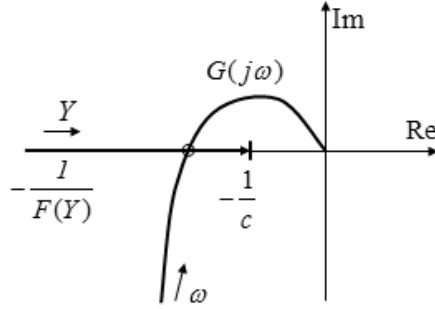


Figura 3.8: Luogo caratteristico della Funzione Descrittiva per la soglia e possibile luogo di Nyquist per un sistema con un polo nell'origine e grado relativo 3.

descrittiva della caratteristica lineare a tratti

$$F(Y) = \begin{cases} \text{Se } Y \leq \bar{y}_1 & \Rightarrow c_1 \\ \text{Se } \bar{y}_1 \leq Y \leq \bar{y}_2 & \Rightarrow c_2 + (c_1 - c_2)\Phi\left(\frac{Y}{\bar{y}_1}\right) \\ \text{Se } \bar{y}_2 \leq Y \leq \bar{y}_3 & \Rightarrow c_3 + (c_2 - c_3)\Phi\left(\frac{Y}{\bar{y}_2}\right) + (c_1 - c_2)\Phi\left(\frac{Y}{\bar{y}_1}\right) \\ \vdots & \end{cases} \quad (3.26)$$

dove per semplicità si è posto

$$\Phi\left(\frac{Y}{\bar{y}_i}\right) = \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{\bar{y}_i}{Y} + \frac{\bar{y}_i}{Y} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{y}_i}{Y}\right)^2} \right) \quad (3.27)$$

- *Trasduttori binari (relé)*: utilizzati principalmente in alcuni asservimenti di scarsa precisione. Forniscono solo una uscita binaria discontinua (tutto-niente, on-off). Un esempio quotidiano è la termocoppia per impianti di riscaldamento aria o acqua di utilizzo domestico. La risposta del trasduttore a relé è riportata in figura 3.10, a).

La funzione descrittiva relativa a questo sensore è facilmente calcolata come

$$F(Y) = \frac{4\bar{e}}{\pi Y} \quad (3.28)$$

ed il corrispondente luogo caratteristico è riportato in figura 3.11, a).

Il relé dà luogo a cicli limite con ogni sistema il cui diagramma di Nyquist intersechi l'asse reale negativo, a dimostrazione del fatto che i

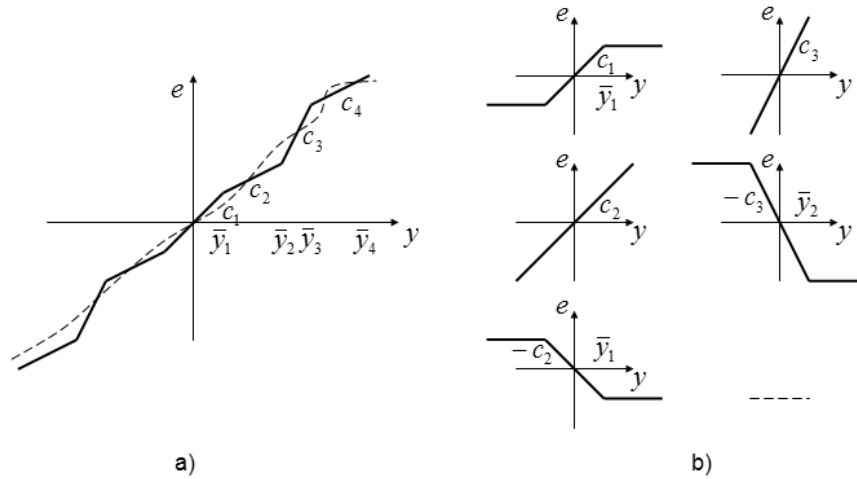


Figura 3.9: Approssimazione lineare a tratti di una risposta non lineare (a) e sua scomposizione in composizione di risposte lineari e saturazioni.

sistemi in retroazione a due posizioni sono intrinsecamente autoscillanti: infatti, a seconda dell'errore, la variabile di uscita del trasduttore viene portata all'uno o all'altro degli estremi del suo campo di variazione, senza la possibilità di raggiungere una condizione di equilibrio. Perché il comportamento del sistema sia accettabile, occorre che l'ampiezza delle oscillazioni all'uscita del sistema controllato sia modesta, cosa che normalmente accade nei sistemi reali, aventi caratteristiche filtranti di tipo passa basso. Si noti che per sistemi con grado relativo maggiore o uguale a 3, con al massimo un polo semplice nell'origine, i cicli limite che si generano sono stabili.

Se il relé ha una soglia (figura 3.10, c)), il suo luogo caratteristico è modificato come appare in figura 3.11, b), corrispondente alla Funzione Descrittiva

$$F(Y) = \begin{cases} \text{Se } Y \leq \bar{y} & \Rightarrow 0 \\ \text{Se } Y \geq \bar{y} & \Rightarrow \frac{4\bar{e}}{\pi Y} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{y}}{Y}\right)^2} \end{cases} \quad (3.29)$$

Infine, in presenza di un relé con isteresi (figura 3.12), a), la cui risposta in funzione dell'andamento del segnale di ingresso è riportato in b) nella

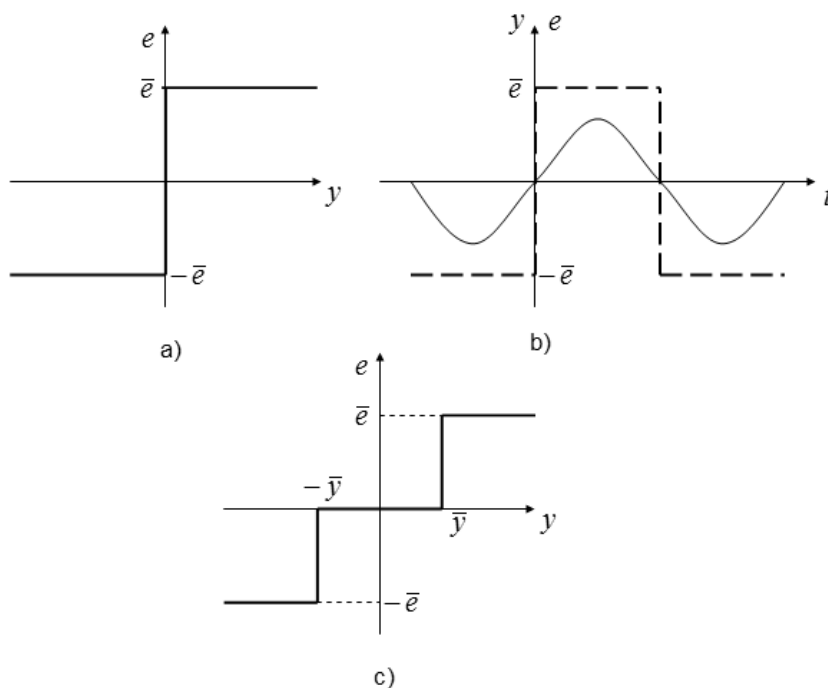


Figura 3.10: Risposta caratteristica di un trasduttore a relé ideale (a) ed andamento del segnale di ingresso (tratto continuo) e di uscita (tratteggio) del trasduttore (b), mentre in (c) è raffigurato l'andamento della risposta di un relé ideale con soglia.

stessa figura, la funzione descrittiva diviene

$$F(Y) = \frac{4\bar{e}}{\pi Y} e^{-j \arcsin \frac{\bar{y}}{Y}} \Rightarrow -\frac{1}{F(Y)} = \frac{\pi Y}{4\bar{e}} \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{y}}{Y}\right)^2} - j \frac{\bar{y}}{Y} \right) \quad (3.30)$$

prima Funzione Descrittiva ad avere il luogo caratteristico non completamente appartenente all'asse reale, ma con la parte immaginaria costante.

### 3.2.3 Simulazioni ed esercizi sulla Funzione Descrittiva

Si consideri lo schema a blocchi di un motore in corrente continua, rappresentato in figura 3.13, a).

Con  $V_a$  si indichi la tensione di armatura (variabile di controllo), con  $R_a$  ed  $L_a$  la resistenza e l'induttanza di armatura, con  $B_m$  l'attrito viscoso del

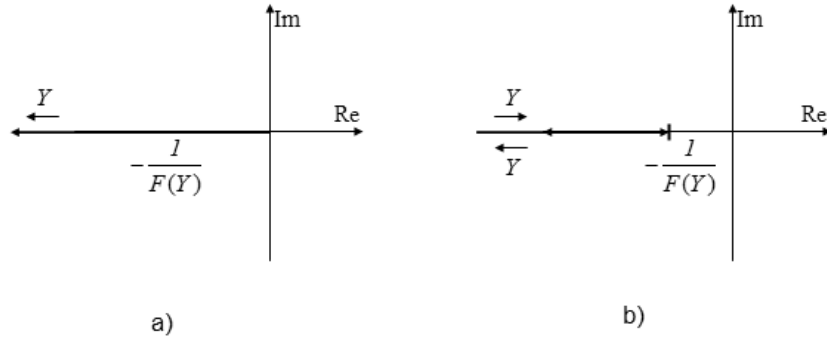


Figura 3.11: Luogo caratteristico di un sistema a relé ideale (a) e con soglia (b).

rotore e con  $J_m$  il momento di inerzia del motore. Sia inoltre  $K_m$  la costante di coppia del motore. Le variabili in gioco sono la corrente di armatura  $I_a$ , la coppia  $\tau$  generata sull'albero motore, la velocità angolare del motore  $\omega$  e la forza contro-elettro-motrice  $F_{f_{cem}}$  indotta dal rotore sullo statore. La funzione di trasferimento tra ingresso  $V_a$  ed uscita  $\omega$  sarà

$$G(s) = \frac{K_m}{(R_a + L_a s)(B_m + J_m s)} = \frac{K'_m}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_m s)} \quad (3.31)$$

Si supponga adesso di controllare il motore con un controllore integrale con costante di guadagno  $K$  variabile, montato come rappresentato in figura 3.13, b). La funzione di trasferimento del guadagno d'anello diviene così

$$G(s) = \frac{K K'_m}{s(1 + \tau_a s)(1 + \tau_m s)} \quad (3.32)$$

La cui funzione di trasferimento è qualitativamente riportata in figura 3.14.

Come esempio numerico, si scelga  $\tau_a = 0.01$ ,  $\tau_m = 0.1$ ,  $K'_m = 10$  ed il guadagno del controllore  $K = 1$ . Con questa scelta si ottiene la seguente funzione di trasferimento  $G(s)C(s)$

$$C(s)G(s) = 10^4 \frac{1}{s(s + 100)(s + 10)} \quad (3.33)$$

il cui diagramma di Nyquist è riportato in figura 3.15, a).

Per il criterio di Nyquist, all'aumentare di  $K$  (figura 3.15, b)) si giunge alla instabilità del sistema lineare in anello chiuso per  $K > K_{lim} = 11$ . In

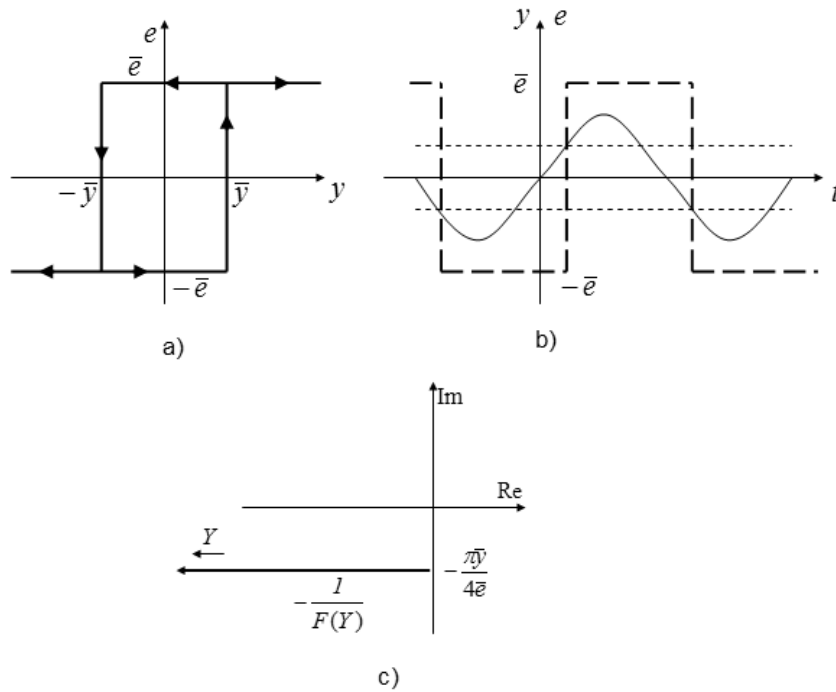


Figura 3.12: Risposta caratteristica di un trasduttore a relé con isteresi (a), andamento del segnale di ingresso (tratto continuo) e di uscita (tratteggio) del trasduttore (b) e luogo caratteristico del sistema a relé con isteresi.

tal caso, l'uscita del sistema  $y \rightarrow \infty$  (figura 3.15, c)). I risultati sono stati ottenuti con lo schema Simulink riportato in figura 3.15, d), dove il blocco riguardante le non linearità è stato, in questo primo caso, trascurato. Tutti gli esempi riportati sono stati ottenuti eccitando il sistema con un riferimento a gradino di ampiezza unitaria all'istante  $T = 0.5sec$ .

Nel caso reale in cui si abbia una saturazione sul sistema di attuazione, con  $\bar{e}/\bar{y} = 1$  (a guadagno unitario nella zona lineare), aumentando il guadagno  $K$  del controllore (e.g. il che equivale ad aumentare il guadagno della zona lineare  $\bar{e}/\bar{y}$ ) dall'unità fino a  $K_{lim}$  il sistema passa progressivamente dalla zona con comportamento asintoticamente stabile (figura 3.16) a), alla zona instabile ( $K = 11.1 > K_{lim}$ ), caratterizzata stavolta da un comportamento persistentemente oscillante (ciclo limite), come rappresentato in figura 3.16 b).

Se si costruisce una rappresentazione minima del sistema (con spazio di stato di dimensione pari a tre) e si eccita con gli stessi ingressi calcolati per il sistema  $G(s)$ , è possibile notare che il ciclo limite si manifesta nello spazio

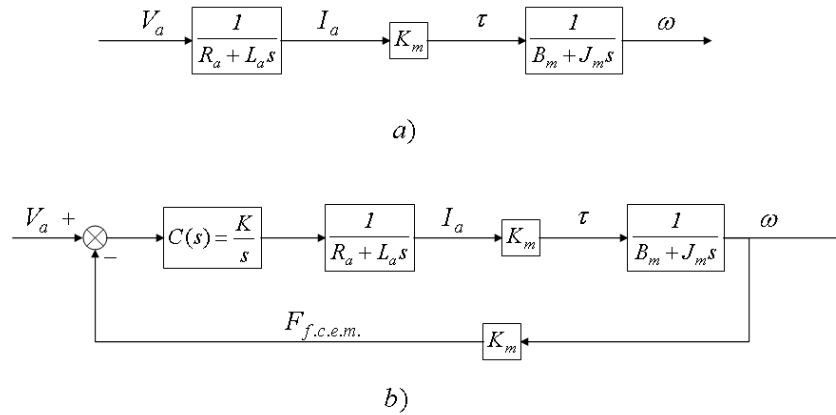


Figura 3.13: Schema a blocchi di un generico motore in continua.

degli stati con una traiettoria chiusa, come riportato in figura 3.16 c).

Si consideri adesso il caso in cui si abbia una soglia con pendenza unitaria. Il luogo caratteristico, come evidenziato precedentemente, nascerà da  $-\infty$  e terminerà, per  $Y \rightarrow +\infty$ , nel punto -1. Si evince perciò che non solo nel caso in cui il guadagno sia  $K = 10$ , ma anche nel caso in cui sia  $K = 20$ , situazione nella quale i sistemi precedenti divenivano instabili (con o senza non linearità), il sistema non manifesta comportamento instabile, ma solo una marcata sovraelongazione (figura 3.17 a) e b)). Si noti inoltre come l'uscita a regime accumuli un errore sul riferimento a gradino di ampiezza unitaria dovuto alla soglia che annulla i segnali di controllo.

Se si aumenta ancora il guadagno, il diagramma di Nyquist del sistema finisce per intercettare il luogo caratteristico, generando instabilità che si manifesta con una oscillazione instabile (figura 3.17). Quanto detto verifica le ipotesi fatte sui punti di equilibrio (ossia dei cicli limite), instabili a causa della direzione di percorrenza dei due diagrammi.

Il grado relativo del sistema è pari a tre, perciò nel caso di non linearità a relé ideale si instaurerà un ciclo limite stabile. Negli esempi di figura 3.18 i valori di uscita del relé sono 1 e -1.

Come confermato dalla teoria, il ciclo limite si manifesta indipendentemente dal guadagno del controllore, come riportato in figura 3.18 a) e b), dove la variazione del guadagno comporta solamente una variazione sulla ampiezza della oscillazione. A causa del guadagno diverso da zero presente nell'anello di controllo dovuto alla assenza di un valore di riposo per il relé

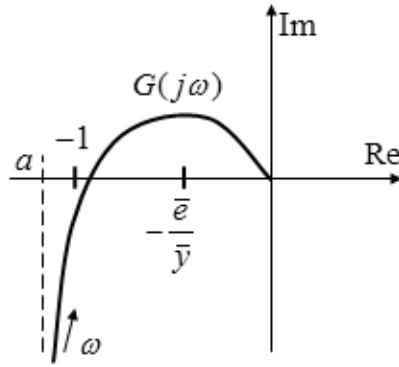


Figura 3.14: Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento di un motore in corrente continua, dove l'asintoto verticale è posizionato in  $a = -KK'_m(\tau_a + \tau_m)$ .

ideale, anche nel caso in cui il sistema non venga eccitato da un riferimento esterno, il sistema genererà una oscillazione persistente (figura 3.18 c)).

Nel caso in cui si abbia una isteresi nella non linearità, con valore di commutazione in 1 e -1, il sistema sarà ancora oscillante anche per guadagno unitario (figura 3.18 d)). La differenza tra questo ultimo caso ed il precedente per il relè ideale (figura 3.18 a)) è una oscillazione a pulsazione inferiore ma ad ampiezza maggiore. Il motivo di questo comportamento è da ricercarsi nella funzione caratteristica del relè con isteresi, posizionata ad una quota inferiore (dovuta alla parte immaginaria negativa) rispetto al relè ideale, e quindi ad una intersezione con il diagramma di Nyquist della  $C(j\omega)G(j\omega)$  in punti a pulsazione inferiore ma ad ampiezza maggiore.

### 3.2.4 Legame tra Funzione Descrittiva e Criterio del Cerchio

Analizzando gli esempi riportati al paragrafo precedente per il calcolo della Funzione Descrittiva, è possibile fare un parallelo tra quest'ultima ed il criterio del cerchio. Ognuna delle non linearità presentate è, per ipotesi sul calcolo della Funzione Descrittiva, simmetrica rispetto all'origine e quindi può essere descritta come una non linearità di settore.

Ad esempio, se si considera la saturazione, essa può essere vista come una non linearità di settore appartenente all'intervallo  $[0, b]$ , con  $b = \bar{e}/\bar{y}$ . Per il criterio del cerchio, la regione critica era definita dal semipiano con



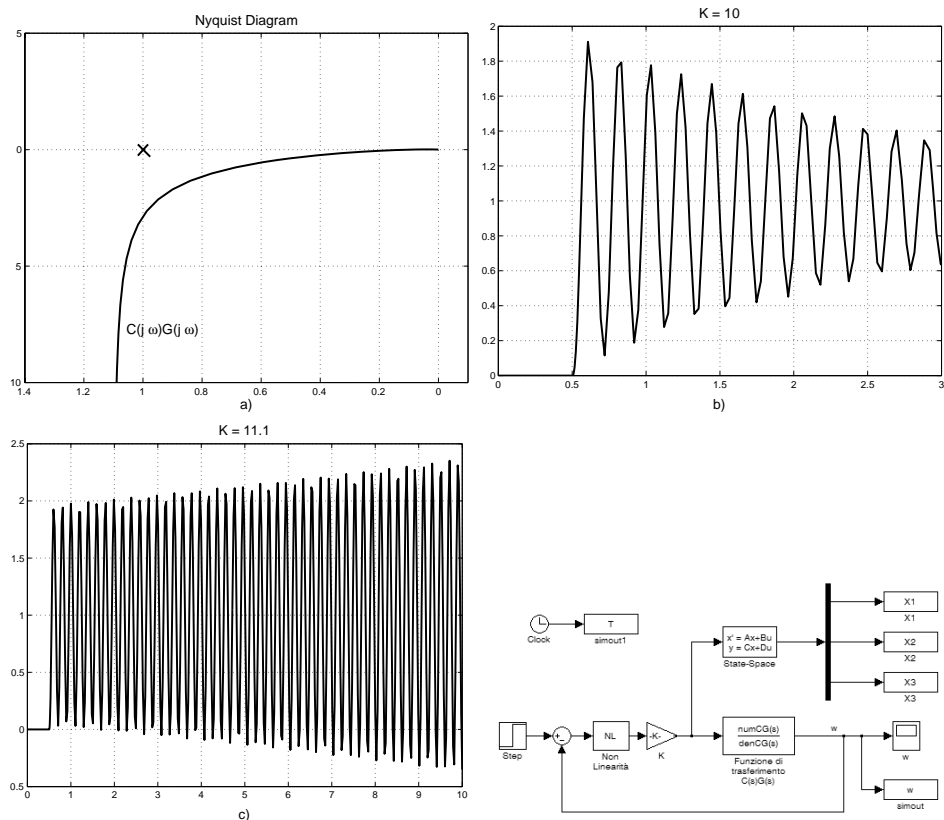


Figura 3.15: a) Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento utilizzata, b) e c) Uscita del sistema (velocità angolare  $\omega$ ) senza non linearità per  $K = 10$  e  $K = 11.1$  rispettivamente, d) schema Simulink di riferimento per le simulazioni.

parte reale minore di  $-1/b$ , la quale definiva, con una condizione solamente sufficiente, il luogo dei punti da non intercettare per evitare instabilità. Se si considera il luogo caratteristico della non linearità, ottenuto con la sua Funzione Descrittiva, esso ha origine nel semipiano reale negativo esattamente nello stesso punto nel quale è definito il semipiano critico. Da queste considerazioni deriva che il luogo caratteristico della non linearità è sempre contenuto nel suo cerchio critico, condizione che verifica la sufficienza del Criterio del Cerchio.

Nel caso della saturazione è possibile, con lo stesso ragionamento svolto precedentemente, fare il parallelo tra Funzione Descrittiva e Criterio di Popov.

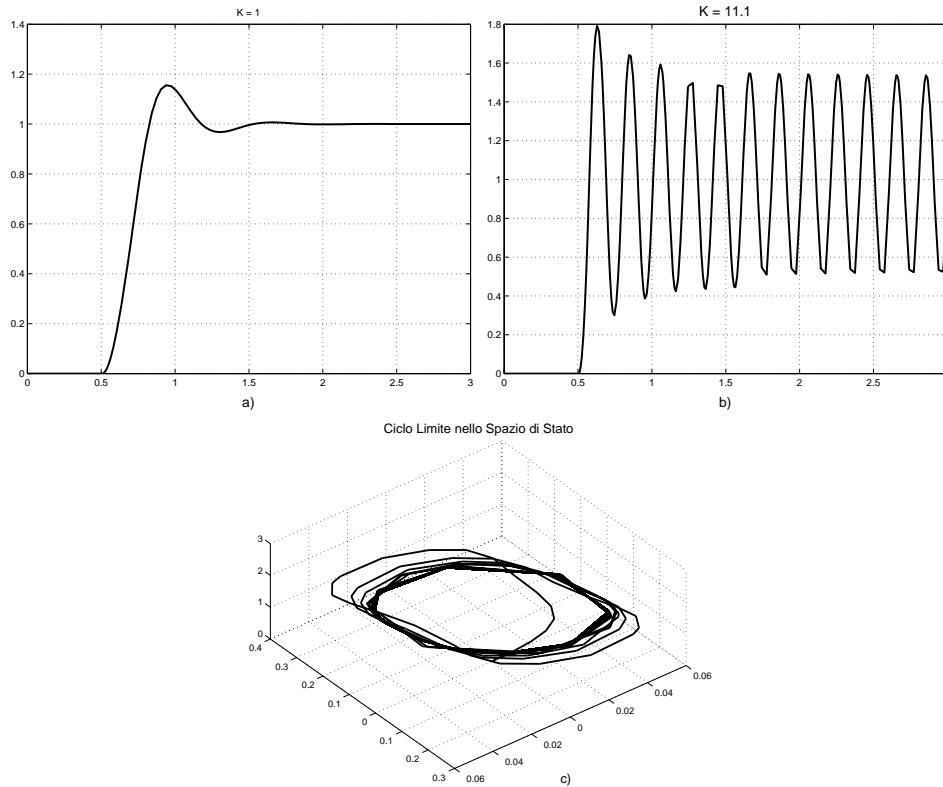


Figura 3.16: Non linearità di saturazione: a) uscita del sistema con guadagno  $K = 1$ , b) uscita del sistema con  $K = 11.1$ , c) ciclo limite nello spazio di stato.

### 3.3 Il fenomeno del salto

Si accenna ora ad un ulteriore particolare effetto che può essere causato da una risposta non lineare “saturata” del trasduttore quando questo sia usato in un anello di controllo: il cosiddetto “fenomeno del salto”.

Si consideri ancora lo schema di figura 3.3, dove il blocco  $G(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento del sistema dinamico formato dal processo ed eventualmente dal compensatore, e il blocco  $NL$  il trasduttore non lineare. Indicheremo in questo paragrafo l’uscita del blocco non lineare con  $\hat{y}$ . Si supponga inoltre che

- il sistema  $G(s)$  non generi sub armoniche;
- il sistema  $G(s)$  sia stabile a ciclo aperto e passa-basso;
- con riferimento nullo,  $r = 0$ , il sistema  $G(s)$  a ciclo chiuso sia stabile.

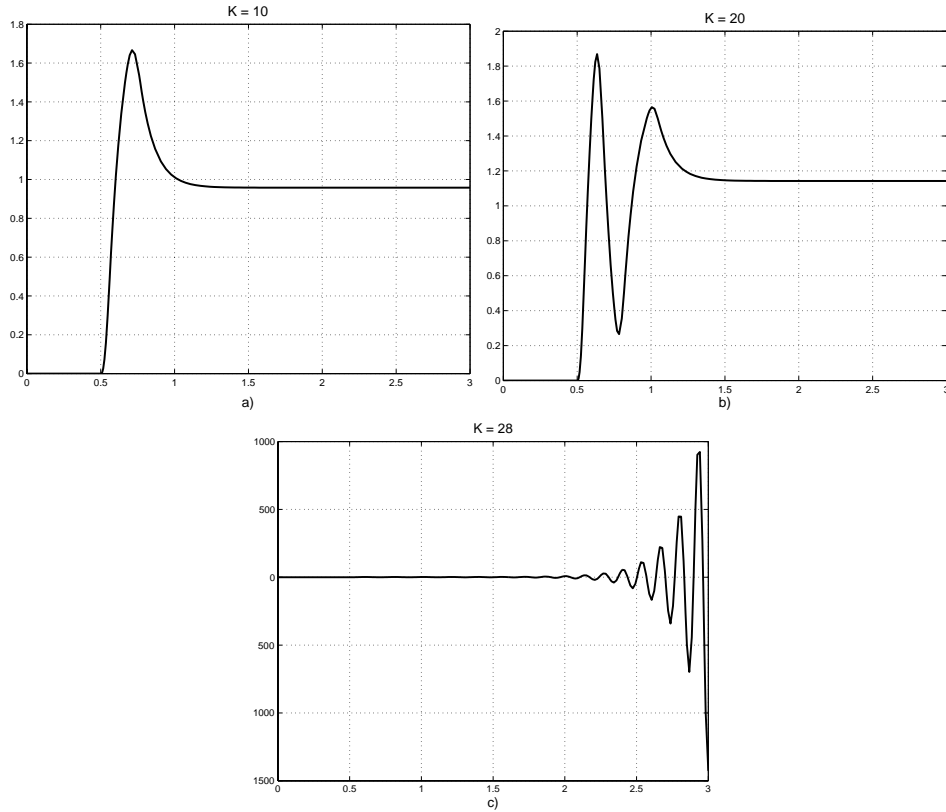


Figura 3.17: Non linearità di soglia: a) uscita del sistema con guadagno  $K = 10$ , b) uscita del sistema con  $K = 20$ , c) ciclo limite instabile instaurato per  $K = 28$ .

Sotto tali ipotesi la tecnica della Funzione Descrittiva dovrebbe dare delle indicazioni abbastanza attendibili sulla risposta a segnali di riferimento sinusoidali.

Il fenomeno del salto può verificarsi in sistemi che usano trasduttori con caratteristica saturabile, cioè tali per cui la sensibilità della risposta decresce piuttosto rapidamente con l'ampiezza del segnale di ingresso. Per semplicità, considereremo un caso estremo di questo comportamento, cioè una saturazione ideale (vedi figura 3.5), laddove si imponga che la pendenza della zona lineare sia unitaria.

La sensibilità (o “guadagno”)  $\hat{y}/y$  di questa non linearità è funzione della ampiezza dell'ingresso, ed è pari ad 1 nel campo  $-1 < y < 1$ , mentre decresce asintoticamente a zero per  $|y| \rightarrow \infty$ . Consideriamo i segnali di riferimento  $r(t)$ , errore  $e(t)$ , uscita  $y(t)$  e misura  $\hat{y}(t)$  nel regime corrispondente ad una

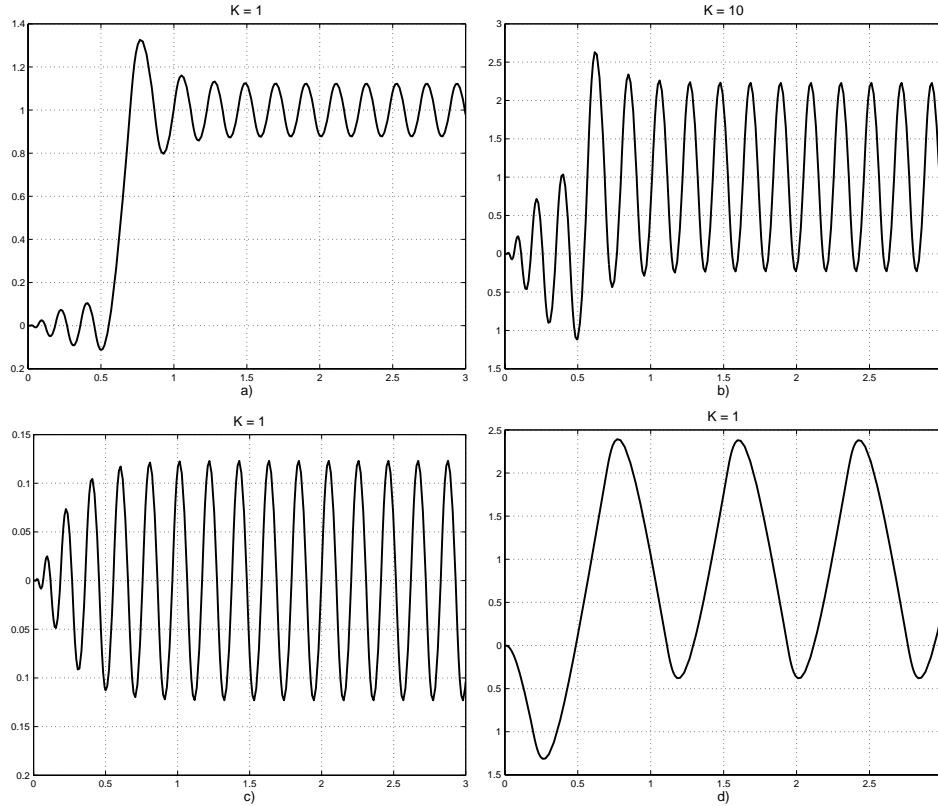


Figura 3.18: Non linearità a relé: a) uscita del sistema con guadagno unitario, b) uscita del sistema con  $K = 10$ , c) uscita libera (sistema non eccitato) del sistema, d) uscita del sistema con guadagno unitario ed aggiunta di isteresi.

particolare frequenza  $\hat{\omega}$ , supponendo che la caratteristica dinamica del blocco  $G(s)$  sia tale da filtrare ogni armonica superiore alla prima. Usando la notazione fasorica, fissiamo

$$\begin{aligned}
 e(t) = E \sin(\hat{\omega}t) &\Rightarrow E \\
 r(t) = R \sin(\hat{\omega}t + \theta) &\Rightarrow R e^{j\theta} \\
 y(t) = Y \sin(\hat{\omega}t + \phi) &\Rightarrow Y e^{j\phi}
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

e di conseguenza, se  $A(y)$  è il guadagno del trasduttore

$$\hat{y}(t) = A(y) Y e^{j\phi}
 \tag{3.35}$$

Al nodo comparatore si ha  $r(t) = e(t) + \hat{y}(t)$ , cioè

$$R e^{j\theta} = E + A(y) Y e^{j\phi}
 \tag{3.36}$$

ovvero sostituendo  $Y e^{j\phi} = G(j\hat{\omega})E$

$$R e^{j\theta} = E + A(y)G(j\hat{\omega})E \quad (3.37)$$

Si noti che, per il caso della saturazione unitaria ideale per la quale come è noto vale:

$$A(y) = \begin{cases} \text{Se } y \leq 1 \Rightarrow 1 \\ \text{Se } y \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \right) \end{cases} \quad (3.38)$$

si avrà

$$\tilde{A}(E) = \begin{cases} \text{Se } E \leq \frac{1}{|G(j\hat{\omega})|} \Rightarrow 1 \\ \text{Se } E \geq \frac{1}{|G(j\hat{\omega})|} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{E|G(j\hat{\omega})|} + \frac{1}{E|G(j\hat{\omega})|} \sqrt{1 - \frac{1}{E^2|G(j\hat{\omega})|^2}} \right) \end{cases} \quad (3.39)$$

$\tilde{A}(E)$  è ancora un numero reale che, per  $E$  che tende a infinito, tende a zero (per  $\hat{\omega}$  appartenente al campo di frequenze di interesse).

La relazione di somma al nodo comparatore ha una interessante interpretazione grafica sul piano di Nyquist (vedi figura 3.19). Notando infatti che:

- A** i vettori  $E$  hanno fase nulla e sono quindi rappresentati da segmenti orizzontali;
- B** i vettori  $\hat{y} = \tilde{A}(E)G(j\hat{\omega})E$  hanno fase  $\angle G(j\hat{\omega})$ , e giacciono quindi sulla retta per l'origine e per  $G(j\hat{\omega})$ ;
- C**  $\lim_{E \rightarrow \infty} |\hat{y}(E)| = \lim_{E \rightarrow \infty} \tilde{A}(E)|G(j\hat{\omega})|E = \frac{4}{\pi}$ ;
- D** per  $E < \frac{1}{|G(j\hat{\omega})|}$  si ha  $\hat{y} = |G(j\hat{\omega})|E$  ossia un guadagno puramente lineare tra riferimento ed uscita: se il riferimento varia da 0 ad un valore limite  $R_s$ , l'uscita varia proporzionalmente da 0 a  $y_s$ ;
- E** per  $E = \frac{1}{|G(j\hat{\omega})|}$  si ha  $\hat{y} = 1$  e quindi l'uscita non cresce più in modo proporzionale, anzi tende ad un valore finito mentre  $r(t)$  tende all'infinito;

si ha l'andamento di  $R$  ricavato in figura 3.19.

Nel caso di figura 3.19 nessun fenomeno particolare interviene: quando si fa crescere l'ampiezza del segnale di riferimento  $R$ , il segnale d'uscita e quello d'errore crescono regolarmente. In altre parole, il legame tra  $r(t)$  ed  $y(t)$  è di tipo biunivoco senza salti di continuità.

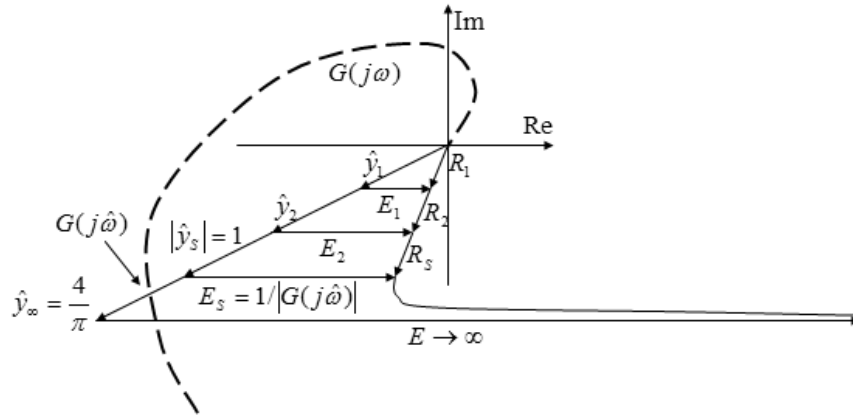


Figura 3.19: Diagramma di Nyquist e scomposizione fasoriale dell'uscita  $y$ , del riferimento  $r$  e dell'errore  $e$ . In questo caso non si manifesta alcun fenomeno inaspettato.

Per altre forme del diagramma di Nyquist della  $G(s)$ , quali quello riportato in figura 3.20, però esiste una fascia di valori del modulo di  $R$  a cui corrispondono tre valori possibili dell'uscita  $Y$ ; in altri termini, mentre il legame tra  $e(t)$  ed  $y(t)$  è biunivoco, il legame tra  $r(t)$  ed  $y(t)$  non lo è. Facendo crescere l'ampiezza del segnale di ingresso  $|R|$  a partire da 0 fino a  $r(t) = R_s e^{j\theta_s}$  con continuità, corrispondente ad  $E = \frac{1}{|G(j\hat{\omega})|}$  e ad  $\hat{y}_s = 1$ , si ha in corrispondenza un valore crescente di  $Y$  con continuità.

La successiva crescita di  $R$  non può avvenire per continuità sullo stesso ramo della curva tracciata in figura 3.20, perché su quella il modulo  $r(t)$  è costretto a diminuire. Si avrà quindi un "salto" al valore  $\bar{r}(t) = \bar{R}_s e^{j(\theta_s + \Delta\theta)}$ , cui corrisponde un "salto" in fase (relativa a  $r(t)$ ) ed ampiezza sia dell'uscita che dell'errore: il modulo dell'uscita è più alto, come lo sfasamento in ritardo, di una quantità finita. Qualora, partendo da valori elevati del riferimento  $r(t)$  si fa decrescere l'ampiezza di  $R$  con continuità si ha che anche l'uscita decresce con continuità, sempre che  $R \geq \bar{R}_c$ ; non appena si diminuisce l'ampiezza del riferimento a valori inferiori ad  $\bar{R}_c$  si ha corrispondentemente un salto dell'uscita da  $\hat{y}_c$  a  $\hat{y}_1$ , con una brusca diminuzione sia della fase e dell'ampiezza che dello sfasamento.

Sempre con riferimento alla figura 3.20, il luogo del modulo di  $r(t)$  tra  $R_c$  ed  $R_s$  è percorribile solo con valori crescenti del modulo, il luogo tra  $\bar{R}_s$  e  $\bar{R}_c$  è invece percorribile solo con una diminuzione del riferimento, il luogo tra  $R_s$  e  $\bar{R}_c$  non risulta invece osservabile. L'andamento dei segnali corrispondenti

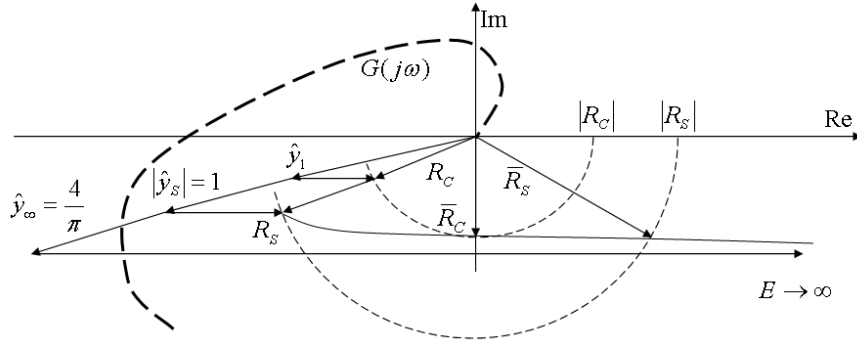


Figura 3.20: Diagramma di Nyquist e scomposizione fasoriale dell'uscita  $y$ , del riferimento  $r$  e dell'errore  $e$ . In questo caso si manifesta il fenomeno del salto.

a questo fenomeno è riportato in figura 3.21 a) e b).

### 3.3.1 Il Criterio del Cerchio Incrementale

Il fenomeno del salto è ovviamente indesiderabile, ed è importante poter assicurare che esso non si verifichi. Esistono delle condizioni sufficienti a fornire tali garanzie:

- 1) il diagramma di Nyquist relativo alla  $G(s)$  lascia la retta per  $-1$  alla sua sinistra;

ovvero

- 2) supponendo che la funzione di trasferimento  $G(s)$  sia stabile in anello aperto, il diagramma di  $G(s)$  non interseca il *cerchio incrementale* relativo alla non linearità.

Il cerchio incrementale per la risposta del trasduttore si costruisce come segue. Si consideri la risposta di un trasduttore riportata in figura 3.22, dove sono individuate le due rette  $\underline{y} = au$  ed  $\bar{y} = bu$  che formano un settore del piano in cui la risposta del sensore è contenuta per ogni valore dell'ingresso, cioè tali che  $au \leq y(u) \leq bu$  (non linearità di settore).

Si introducono (se esistono) altre due costanti  $a'$  e  $b'$  tali che

$$a'(u_2 - u_1) \leq y(u_2) - y(u_1) \leq b'(u_2 - u_1), \quad \forall u_2, u_1 : u_2 > u_1 \quad (3.40)$$

Se  $y(u)$  è monotona, come assumiamo, sarà

$$a' \leq a < b \leq b' \quad (3.41)$$

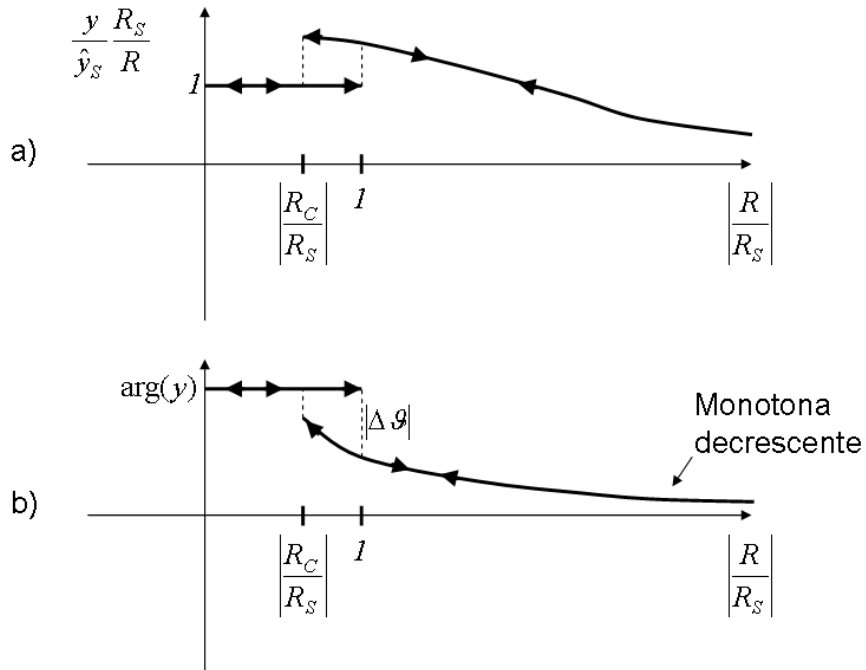


Figura 3.21: Andamento del segnale di uscita, normalizzato rispetto al corrispondente andamento del riferimento, in modulo ed in fase.

Si ricorda che l'assenza di intersezioni del luogo di Nyquist col cerchio di diametro  $[(-1/a, 0), (-1/b, 0)]$ , garantisce la stabilità in senso BIBO (ingresso limitato, uscita limitata) del sistema. Si può provare che la non-intersezione col cerchio di diametro  $[(-1/a', 0), (-1/b', 0)]$  (figura 3.23) garantisce la continuità ingressi-uscite, e quindi esclude il fenomeno del salto.



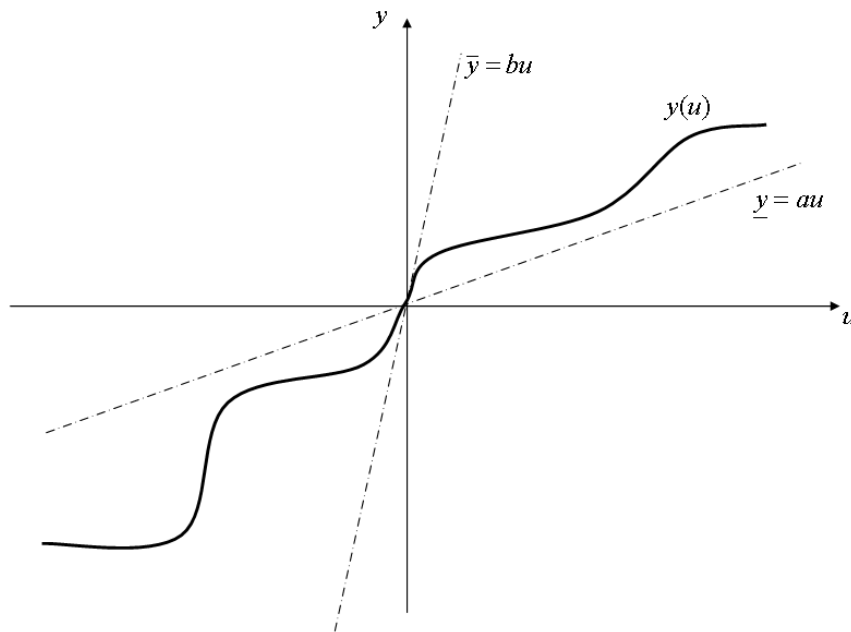


Figura 3.22: Non linearità di settore per un generico trasduttore di ingresso  $u$  ed uscita  $y$ .

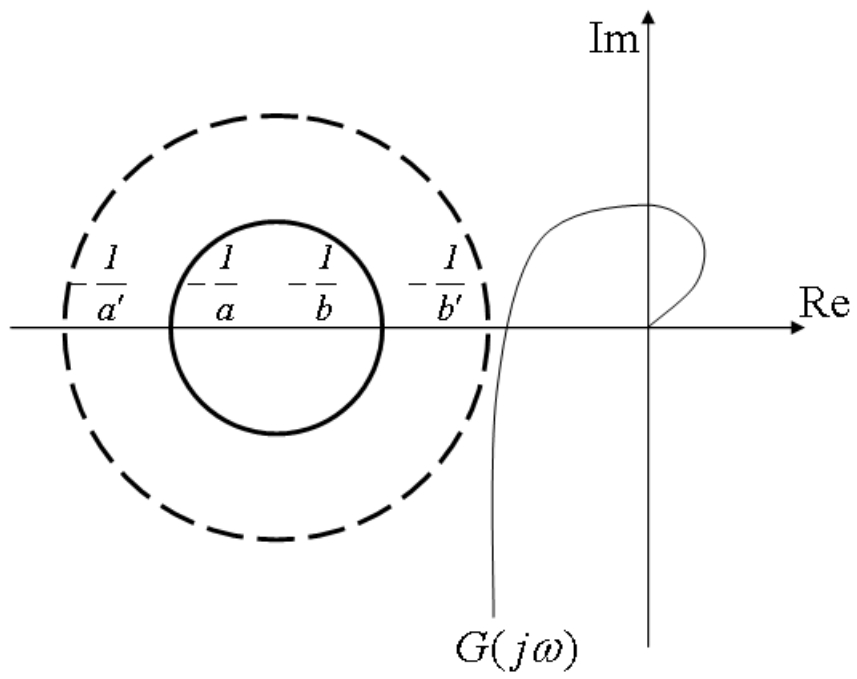


Figura 3.23: Cerchio e cerchio incrementale.